

Qualité de la mesure en production

EYROLLES
Éditions d'Organisation

Daniel Duret

Qualité de la mesure en production

EYROLLES
Éditions d'Organisation

Éditions d'Organisation
Groupe Eyrolles
61, bd Saint-Germain
75240 Paris cedex 05

www.editions-organisation.com
www.editions-eyrolles.com



ISBN : 978-2-212-54140-3

Introduction

Les moyens de production ont une performance qui s'est considérablement accrue ces dernières années (en facilité de réglage et en faibles dispersions). Parallèlement, du fait d'une offre abondante du marché, les exigences des clients pour une demande en technologie de pointe sont de plus en plus fortes. En conséquence, la conformité des produits ne peut pas encore être garantie directement sans mesure. Pour ce faire, les entreprises utilisent un nombre important de matériels de mesure destinés :

- à prouver la conformité finale des produits vis-à-vis des exigences clients (contrôle de réception) ;
- à vérifier la faisabilité d'un processus de production (en phase de mise au point et en suivi de production).

Réaliser une mesure n'est pas un acte anodin, car elle permet de prendre une décision technique et économique. Pour que cette décision soit prise à bon escient, il faut avoir foi dans sa mesure. Contrairement à de mauvaises habitudes, cette foi ne doit pas être aveugle, il faut savoir garder un esprit critique. Cet ouvrage se propose d'éclairer le processus de mesure en abordant les thèmes suivants :

- **comprendre les exigences de mon client.** Cela suppose que nous utilisons un même langage. Les normes de définition du produit (GPS[1]) ne seront pas abordées dans cet ouvrage. Par contre, le concept d'unités « étalon » sera exposé avec quelques rappels historiques (chapitre 1) ;
- **être capable de choisir un appareil bien adapté à cette mesure.** Sans faire de la technologie métrologique, cela nécessite de connaître les différents principes de mesure et le vocabulaire de description y afférents (chapitre 2) ;

1. GPS : NF EN ISO 14253-1 mars 1999, Spécification géométrique du produit (GPS) – Vérification par la mesure des pièces et équipements de mesure, Partie 1 : règles de décision pour prouver la conformité ou la non-conformité à la spécification.

- **s'assurer que les appareils utilisés ont bien la qualité métrologique requise.** Pour cela ils doivent être identifiés et accrédités par un service interne ou un organisme externe qui prouvera leur rattachement aux étalons nationaux (chapitre 3) ;
- **analyser les sources d'erreurs potentielles pouvant influencer la mesure.** Dans l'esprit d'une analyse 5M[1], nous chercherons à mettre en évidence les différents acteurs perturbateurs de la mesure (chapitre 4). Nous mettrons l'accent sur l'influence du posage que nous retrouvons dans beaucoup de mesurage et comment y remédier (chapitre 5) ;
- **valider un processus de contrôle.** Pour cela nous devons quantifier l'erreur de justesse et de fidélité (répétabilité et reproductibilité). Après quelques rappels de statistiques de base appliquées à la mesure (chapitre 6), nous présenterons comment estimer la fidélité en rappelant la méthode industrielle du MSA[2]. Ensuite, nous préciserons comment estimer l'erreur de justesse et nous présenterons une synthèse avec l'approche « incertitude inertielle », permettant de lier ces deux concepts (chapitre 7) ;
- **estimer l'incertitude de mesure associée au résultat donné.** Nous rappellerons la méthode du GUM[3] permettant d'estimer une incertitude de mesure par expertises et statistiques. Nous l'appliquerons aux mesures avec correction (chapitre 8) ;
- **maintenir cette qualité métrologique au cours du temps.** Pour cela, on présentera différentes méthodes de détection de dérive éventuelle. Cette surveillance du matériel sera abordée au chapitre 9.

1. Duret D., Pillet M., *Qualité en production : de l'ISO 9000 à Six Sigma*, Paris, Éditions d'Organisation, 2005.
2. MSA : *Measurement Systems Analysis*, manuel développé sous la responsabilité de Daimler Chrysler Corporation, Ford Motor Company et General Motors Corporation (*www.carwin.co.uk/qs*).
3. GUM : *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (NF ENV ISO 14253-2 décembre 2002).

Sommaire

Chapitre 1

Système d’unités

Le besoin d'étalons

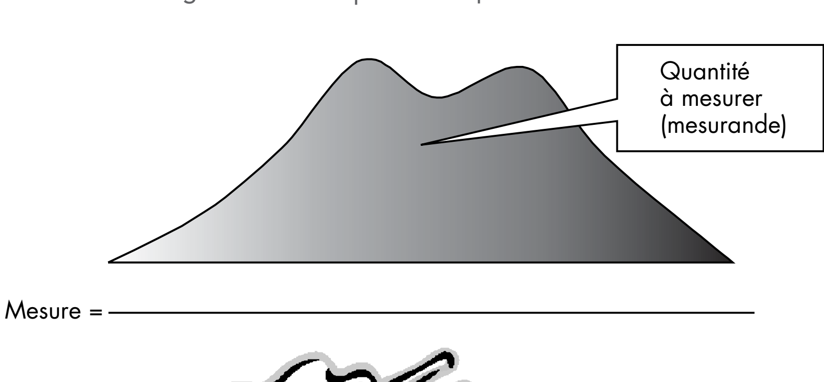
Mesurer, c'est faire une division. Le numérateur représente une grandeur (longueur, masse…) que l'on veut quantifier. Le dénominateur représente une certaine quantité, de même nature physique, que l'on a pu (ou que l'on a su) bien définir. C'est la notion même d'étalon (qui correspond dans ce cas à la grandeur unité[1]), que nous développerons par la suite.

Illustrons ce concept avec un exemple didactique : mesurer un tas de sable en nombre de brouettes.

Pour faire une mesure, il faut :

- avoir une grandeur physique à mesurer (ici un **volume** de sable) ;
- choisir un domaine de cette grandeur comme étalon de mesure appelé également grandeur unité (attention ce n'est pas la brouette qui est l'étalon, mais le volume contenu dans la brouette) ;
- dénombrer la quantité à retenir en précisant le nombre (ou mesure) d'unités définies par la quantité étalon.

Figure 1.1 : Exemple didactique de mesure



1. Les termes spécifiques à la métrologie (comme grandeur ou unité) sont définis dans le VIM (*Vocabulaire international de la métrologie*) – PR NF ISO 99999 octobre 2006 (VIM), 3e éd.

La mesure, en tant que résultat de la division, s'exprime par une grandeur scalaire (un réel qui est estimé par un entier et une partie fractionnaire).

> Exemple
>
> Pour mesurer le temps qui passe (chronométrie), le choix de l'étalon correspond à la période d'un mouvement oscillatoire (du pendule à la vibration d'un atome). Il faut ensuite prévoir un système de comptage.

Nous verrons par la suite que le choix de l'étalon est quelque chose de délicat. Sa définition et son appropriation ne sont pas toujours évidentes. Cela a conduit à une multitude d'étalons concurrents pour une grandeur physique donnée. C'est pourquoi nous ferons toujours suivre le résultat d'une mesure par le type de l'étalon retenu (par exemple : 2,35 mm).

Nous voyons apparaître deux sources d'erreurs potentielles :

- une définition faible de l'étalon (grandeur unité) ;
- un dénombrement incorrect dans le résultat de la division.

Un peu d'histoire métrologique

On peut retenir quatre grands domaines d'application nécessitant une métrologie de qualité :

- domaine commercial (sous-entendu, être sûr d'en avoir pour son argent) ;
- domaine architectural et cadastral (pyramides, cathédrales, palais…) ;
- domaine scientifique (échanger et comparer ses résultats pour valider un modèle) ;
- domaine industriel (passer de l'unitaire à la série, avec la possibilité d'interchangeabilité).

Concernant le domaine scientifique, rappelons les propos de Lord Kelvin :

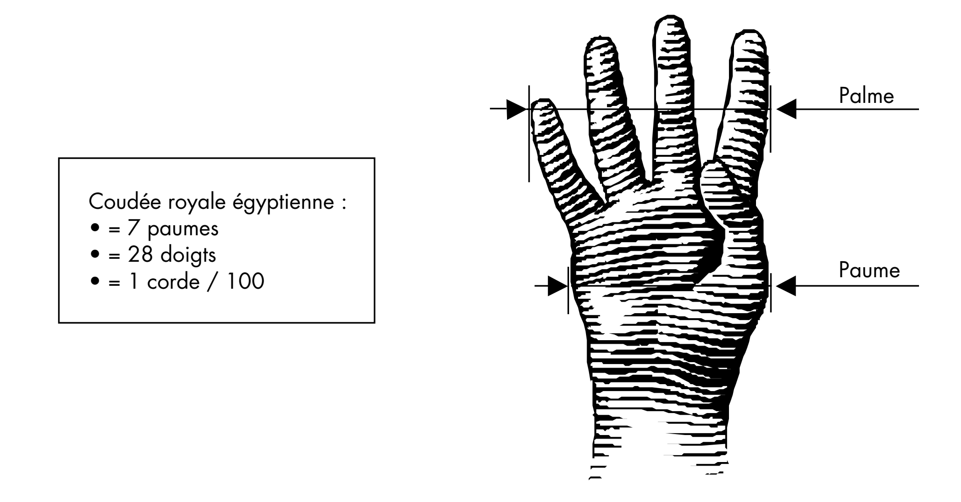
> « Si vous pouvez mesurer ce dont vous parlez, et l'exprimer par un nombre, alors vous connaissez quelque chose de votre sujet. Si vous ne le pouvez, votre connaissance est d'une bien pauvre espèce et bien incertaine. » [William Thomson (1824-1907), mieux connu en tant que Lord Kelvin.]

A contrario, ce n'est pas parce que l'on a retenu un système de mesure, que l'on connaît parfaitement la grandeur à mesurer (par exemple, les tests de mesure du quotient intellectuel proposés par Binet (1857-1911)).

L'héritage de l'Antiquité

L'idée de choisir **un domaine d'une grandeur** [par exemple la longueur] comme étalon est naturel et très ancien (le plus souvent lié à la morphologie humaine). On peut citer par exemple, les systèmes d'unités et de leurs multiples et sous-multiples égyptiens, gréco-romains, arabes et chinois. Ces derniers ont très tôt utilisé un système décimal.

Figure 1.2 : La coudée royale égyptienne



La métrologie et le pouvoir

Pour quantifier les échanges commerciaux, il fallait bien utiliser des étalons de mesures (par exemple, étalons de volume pour la mesure des céréales). Dans les transactions commerciales, il pouvait y avoir des achats dans une unité et des ventes dans une autre unité plus avantageuse. La lutte contre ces pratiques injustes relevait naturellement du

garant de la justice dans le pays, c'est-à-dire le roi lui-même. Dans la plupart des pays, se trouvait un système de « poids et mesures » placé sous la haute autorité du roi.

En 1671, Colbert avait cherché à rendre uniforme les poids et mesures dans tous les ports et arsenaux de France[1].

Notons que cette volonté d'unicité des différents étalons intéressait également les services de collecte des taxes et des impôts.

Le système anglais

Ce système, fondé sur des multiples qui ne nous sont plus habituels, est en fait très ancien. C'est un des premiers exemples de normalisation étendue à tout un royaume.

Par exemple, pour les longueurs, les multiples et sous-multiples sont construits à partir du « pied » . Effectivement, cela correspond approximativement à la longueur d'un pied humain (de grande taille), mais cela peut être vu également au sens d'instrument de mesure (comme pour un pied à coulisse) (tableau 1.1).

Tableau 1.1 : Système anglais pour les longueurs (exemples)[2].

Nom anglais	Nom français	Ratio/pied	Équivalence SI
Mile	Mille	5 280/1	1 609,344000 m
Yard	Verge	3/1	0,914000 m
Foot	**Pied**	**1**	**0,304800 m**
Inch	Pouce	1/12	25,400 mm
Point	Point	1/144	0,176388 mm

1. Hocquet J.-C., *La Métrologie historique*, Paris, PUF, 1995.
2. *http://fr.wikipedia.org*.

La genèse du système métrique décimal

En France, on trouvait un système d'unités très proche du système anglais. Le problème essentiel venait de la non-uniformité (dans les provinces) de la définition du pied et d'une base de division qui pouvait varier (par exemple, la toise et le pied n'étaient pas divisés de la même façon).

Le besoin d'unicité de l'étalon

Bien que l'idée d'unicité ait déjà été proposée, son application ne pouvait se faire que suite à une volonté forte, de manière à vaincre les habitudes et l'inertie des usagers. Cependant, le développement du commerce, de la région vers l'international, va être un vecteur de redéfinition d'un système plus cohérent. Pour éviter toutes querelles de nationalisme, l'idée d'une définition universelle des étalons, rattachés à des constantes physiques, a germé dans l'esprit de la communauté scientifique.

La fin du XVIIe siècle voit s'affronter deux écoles. L'une propose de rattacher l'étalon à l'arc terrestre (Gabriel Mouton, 1618-1694), l'autre définit l'étalon comme le tiers de la longueur d'un pendule battant la seconde, appelé « pied universel » (Jean Picard, 1620-1682).

Les deux écoles coexisteront pendant près d'un siècle et donneront lieu à différentes expériences (cela permettra d'affiner la définition de l'étalon souhaité). Notons que la définition à partir du pendule créait un lien entre l'unité de longueur et l'unité de temps. Ce lien sera à nouveau d'actualité, quelque trois cents ans plus tard.

La nécessité d'une volonté politique

Promouvoir un nouveau système de mesure ne doit pas uniquement être une affaire de spécialistes. Cette promotion doit être soutenue par une volonté politique forte de changement et des moyens financiers associés. Dès 1774, Turgot charge Condorcet (nommé inspecteur des Monnaies) de réfléchir au choix d'un étalon et de son usage dans le royaume à partir de copies (on ne parle pas encore de chaîne d'étalonnage, mais le concept est né).

La Révolution française, et sa soif de changement, sera un catalyseur pour promouvoir ce nouveau système. L'uniformisation des « poids et mesures » devient un enjeu national.

L'Académie des sciences est chargée de définir le nouvel étalon de longueur. La définition de l'étalon à l'aide d'un pendule ou à partir d'un arc du méridien terrestre sera l'objet de controverses importantes. C'est la seconde proposition qui l'emportera. En effet, en 1791, l'Assemblée nationale accepte les termes du rapport de la commission composée de Borda, Lagrange, Laplace, Monge et Condorcet. La longueur du pendule battant la seconde est rejetée au profit de la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

De la définition à la matérialisation du mètre

Il y avait déjà eu différentes mesures d'arcs de méridien terrestre par triangulation. Il a été décidé de mesurer par triangulation l'arc de méridien entre Dunkerque et Barcelone, deux villes situées à 45 degrés de latitude environ. Le choix des villes donnait une dimension internationale à cette opération.

L'Assemblée nationale, en juin 1792, va charger deux astronomes, Jean-Baptiste Delambre pour la partie nord et Pierre Méchain pour la partie sud, de faire ces mesures. Dans le contexte historique difficile de l'époque, ce fut une véritable épopée[1].

Le 22 juin 1799, l'étalon « mètre » est consacré. Pour des raisons purement pratiques, le mètre sera matérialisé ensuite par une règle de platine.

La Conférence générale des poids et mesures

Le système métrique décimal du 22 juin 1799 représentant le mètre et le kilogramme mettra quelques années à s'imposer. Présenté lors des expositions internationales, sa diffusion sera rapide au sein de la communauté scientifique mondiale (citons en particulier Gauss, Weber, Maxwell et Thomson).

1. Pour en savoir plus, lire *La Méridienne* et *Le Mètre du monde* de Denis Guedj.

De ces différentes rencontres et associations internationales de scientifiques, naquit le Bureau international des poids et mesures (1876) qui travaille sous l'autorité de la Conférence générale des poids et mesures[1] (CGPM), rassemblant des délégués des états membres de la Convention du mètre et des états associés à la CGPM, et qui se réunit à Paris tous les quatre ans.

En 1889, la première CGPM adopte un nouvel étalon du mètre, copie de l'ancien, mais de forme et d'alliage plus robustes aux influences (de même pour le kilogramme). Il représente le mètre à la *température de la glace fondante*. Un nouvel étalon va être adopté pour le temps : la seconde. Ces trois unités de base vont former le système MKS.

En 1901, Giorgi proposera d'ajouter une unité électrique à ce système. Cela donnera le système MKSA adopté en 1946.

En 1960 (onzième CGPM), ce système sera complété par l'introduction du kelvin et de la candela et prendra le nom de Système international d'unités (SI). La CGPM propose également une nouvelle définition du mètre (en accord avec l'ancienne) :

> « Le mètre est la longueur égale à 1 650 763, 73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux 2p10 et 5d5 de l'atome de krypton 86. »

La définition renoue avec la volonté de ses créateurs, c'est-à-dire essayer de le lier à des constantes physiques.

En 1967, la treizième CGPM rattache la seconde au monde de l'atome :

> « La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. »

En 1971, la quatorzième CGPM lui ajoutera la mole.

En 1983, la dix-septième CGPM propose une autre définition du mètre :

> « Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde. »

Le mètre et la seconde sont liés, nous retrouvons l'esprit du pied universel défini à partir du pendule battant la seconde.

1. *http://www.bipm.org/fr/convention/cgpm/.*

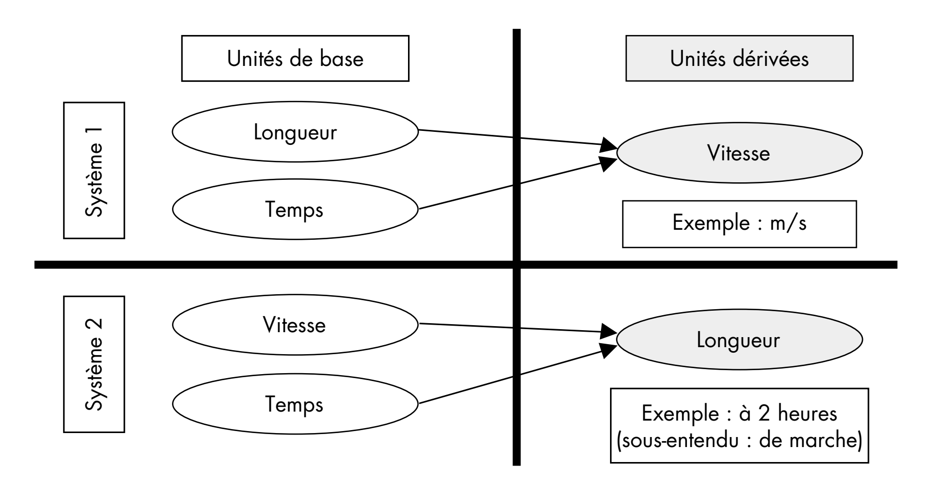
D'une manière générale, en fonction des connaissances physiques du moment, on cherchera à rattacher les unités fondamentales à des phénomènes physiques[1] supposés invariants. Seule l'unité de masse (pour l'instant) reste fidèle à sa première définition.

Nous n'avons décrit que quelques résolutions des différentes conférences générales des poids et mesures. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se reporter au site du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)[2].

Le système international d'unités : SI[3]

Il est divisé en unités SI de base et en unités SI dérivées. Choisir les unités de base juste nécessaires et indépendantes fait appel à des connaissances physiques de haut niveau et qui dépendent donc de l'époque où elles ont été définies, héritage de l'histoire, avec ses habitudes et son inertie face aux changements. Les sept unités de bases seront considérées comme indépendantes et uniques. Le choix a forcément une part d'arbitraire, comme l'illustre la figure 1.3.

Figure 1.3 : Choisir ses unités de base



1. *http://www.bipm.fr/fr/si/si_constants.html.*
2. *http://www.bipm.org/fr/publications/resolutions.html.*
3. Pour plus de détails, le lecteur est invité à télécharger la notice « Le système international d'unités » BIPM sur le site : *http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure/general.html.*

Unités SI de base

Elles sont au nombre de sept. Leur mise en œuvre pratique est définie sur le site Web du BIPM à l'adresse : *http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure/appendix2/*.

Tableau 1.2 : Unités SI de base

m	Le mètre (unité de longueur)
Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.	
kg	Le kilogramme (unité de masse)
Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.	
s	La seconde (unité de temps)
La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.	
A	L'ampère (unité de courant électrique)
L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \times 10 - 7$ newton par mètre de longueur.	
K	Le kelvin (unité de température thermodynamique)
Le kelvin est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.	
mol	La mole (unité de quantité de matière)
1. La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. 2. Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.	
cd	La candela (unité d'intensité lumineuse)
La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 1\,012$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.	

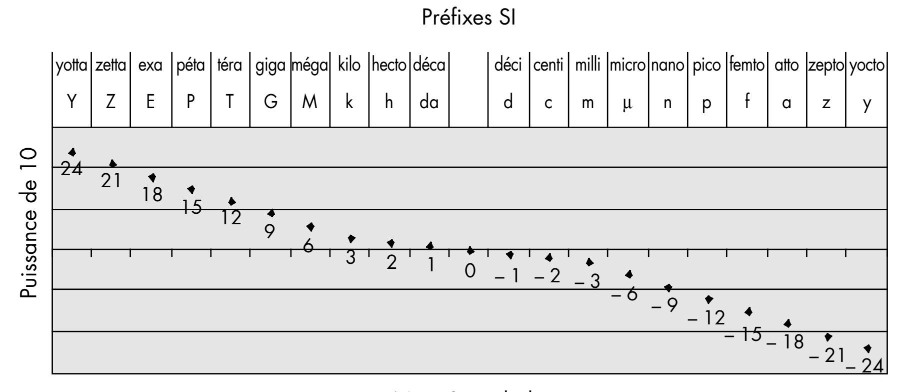
Unités SI dérivées[1]

De nombre illimité, elles sont le plus souvent définies à partir des unités de base (par exemple, la vitesse exprimée en m/s). Vingt-deux d'entre elles ont reçu un nom propre, le plus souvent correspondant au nom d'un scientifique illustre (par exemple, la force exprimée en newtons). Notons que deux unités sans dimension (correspondant à un rapport de même grandeur, comme pour un pourcentage) ont un nom propre, à savoir le radian (angle plan) et le stéradian (angle solide).

Préfixes des multiples et sous-multiples

La onzième CGPM (1960) a défini des préfixes pour les multiples et sous-multiples des diverses unités. Au-dessus du kilo et au-dessous du milli, on retrouve une base en 10^3 (fig. 1.4).

Figure 1.4 : Choix des multiples et sous-multiples



Le kilogramme en tant qu'unité de base devrait avoir un nom propre (comme par exemple, la proposition historique du « grave », qui a laissé la place au « gramme » pour revenir au « kilogramme »). En conséquence, on écrira un mg et non un µkg. Il faut faire attention de ne pas

1. *http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure/chapter2/2-2/table3.html.*

confondre les préfixes avec les unités. Ainsi un « mN » correspond à un milli newton et non pas à un couple, qui s'exprimera, pour éviter toute confusion, en « Nm ».

Principales règles d'écriture

- Les symboles d'unités sont en minuscules sauf si elles dérivent d'un nom propre (par exemple, 1 A).
- Le préfixe est sans séparateur (par exemple, 1 μm).
- Lorsque l'unité est écrite complètement, elle doit être en minuscule comme un nom ordinaire (par exemple, 2 ampères).

> ***Remarque :*** *le litre peut s'écrire l ou L pour éviter toute confusion avec le chiffre 1 (CGPM, 1979). Il n'y a jamais eu de Monsieur Litre*[1].

Unités hors du SI

Par habitude, certaines anciennes unités résistent. Il est difficile de s'approprier une nouvelle unité. Par exemple le radian, dans le langage courant, a du mal à s'imposer devant le degré. En revanche, la minute d'angle commence à laisser le pas au 1/10e et au 1/100e de degré (calculatrice oblige). La mesure du temps utilise toujours une base non décimale (heure, minute, seconde). D'autres unités comme l'hectare, le litre, la tonne sont toujours utilisées.

Les unités précitées ont un « usage » accepté par le SI.

Il existe un grand nombre d'unités en dehors du système SI. Certaines sont tolérées pour des raisons de commodité d'usage, d'autres par contre ne sont pas recommandées et devraient donc disparaître progressivement (par exemple, le cheval remplacé par une expression en watts)[2].

1. *http://www.student.math.uwaterloo.ca/~stat231/stat231_01_02/w02/section3/fi1.2.pdf.*
2. *http://www.bipm.org/fr/si/si_brochure/chapter4/4-2.html.*

Chapitre 2

Principes de mesure et terminologie

Dans ce chapitre nous essayerons de classer les appareils de mesure suivant deux approches :

- la première sera basée sur la réalisation physique de l'appareil (méthode directe et méthode indirecte). Nous nous limiterons aux principes de base. Pour une approche plus technologique, le lecteur est renvoyé aux ouvrages spécialisés portant sur l'instrumentalisation ;
- la seconde précisera si l'utilisation d'étalons annexes est nécessaire (méthode par comparaison ou à lecture autonome).

Comme pour toutes disciplines, le métrologue doit utiliser un langage de communication si possible exempt de toute ambiguïté. Pour cela un minimum de normalisation est nécessaire. Nous détaillerons quelques termes utilisés dans ce chapitre en nous référant au *Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de la métrologie*[1]. Ce document de synthèse est l'émanation de sept organisations mondiales (BIPM, CEI, FICC, ISO, OIML, UICPA, UIPPA).

De la valeur d'entrée (grandeur réelle ou mesurande) à la valeur de sortie (mesure), transitent des données intermédiaires qui peuvent prendre différentes formes physiques. Nous recenserons les éléments qui peuvent intervenir dans cette « chaîne de mesures ».

Principe physique de mesure

Méthode directe

C'est la méthode la plus ancienne et la plus naturelle. Par exemple, si nous mesurons la longueur d'un objet avec un double décimètre, nous obtenons directement une mesure de l'objet. Il n'y a pas de transformation physique de l'entrée (déplacement).

1. Les termes spécifiques à la métrologie sont définis dans le VIM (*Vocabulaire international de la métrologie*) – Projet de norme AFNOR X07-001PR (PR NF ISO 99999 octobre 2006).

Exemples de mesures directes

- Mesure à partir d'une règle (en métal gravé, en verre avec dépôt…).
- Mesure de masse (balance type « Roberval »).
- Mesure de volumes (pipette graduée).
- etc.

Méthode indirecte

C'est la méthode la plus répandue dans les appareils de mesure actuels. La grandeur d'entrée (mesurande) est transformée en une succession de grandeurs intermédiaires de nature physique différente jusqu'à la grandeur finale de sortie qui sera quantifiée (mesure).

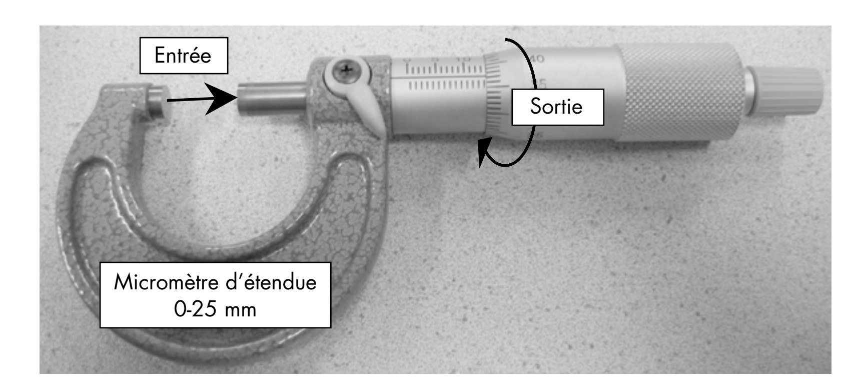
Plus particulièrement, cela permet de passer à des grandeurs de type électrique qui facilitent le transfert vers un traitement informatique.

Exemples de mesures indirectes pour les longueurs

Le déplacement (entrée) pourra être transformé par exemple :

- en rotation (micromètre[1]) : bien que l'utilisateur ait l'impression de lire directement un déplacement, il compte en réalité un nombre de tours et en déduit indirectement le déplacement du fait du pas de la vis micrométrique (fig. 2.1) ;

Figure 2.1 : « Entrée-Sortie » du micromètre



- en grandeurs électriques (capteurs inductifs, capteurs capacitifs, variations de résistances électriques…) ;

1. Connu également sous le nom de son inventeur Jean-Louis Palmer (1848).

- en ondes sonores (par exemple la conformité dimensionnelle d'une pale de turbine sera donnée suite à l'analyse du spectre du son provoqué par sa vibration) ;
- en variations de pression (analyse des pressions des fuites d'air, fonction du jeu entre l'appareil et la pièce à mesurer) ;
- etc.

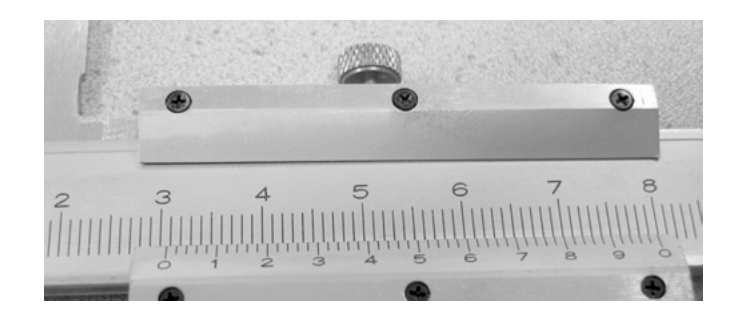
Certaines mesures de grandeurs nécessitent une méthode indirecte comme par exemple :

- la mesure des forces (dynamomètre de type « peson », jauge de contraintes, anneau de déformation avec mesure de pression d'air, capteur piézoélectrique…) ;
- la mesure des températures (dilatation de liquide, solide ou gaz, variation de résistance électrique, thermocouple, effet photovoltaïque, rayonnement…).

Méthode directe globale avec lecture indirecte locale

En métrologie dimensionnelle, la lecture directe par règle est très employée. Il suffit de compter directement un nombre de pas. Il reste le problème de mesurer une fraction de pas. Cette fraction peut être mesurée directement par des moyens de grossissement (type microscope) ou en utilisant une lecture par amplification géométrique de type vernier[1] (fig. 2.2) ou franges de Moiré.

Figure 2.2 : Exemple d'une lecture (30,80 mm) avec vernier au 1/50e



1. Inventé par le géomètre français Pierre Vernier (1580-1637).

Lors de l'utilisation de règles optiques, on peut compter le nombre de pas (réseau de traits distants de 0,25 à 10 μm environ, correspondant à des couches de métal sur un support en verre ou en céramique) et déterminer la fraction de pas complémentaire par analyse du signal électrique correspondant.

Étalons externes ou internes

Mesure par comparaison (étalons externes)

C'est le type même de l'appareil utilisé en grande série. En effet, dans ce cas particulier, l'appareil sera utilisé toujours pour la même tâche. On lui demandera de permettre l'estimation d'écarts par rapport à une pièce supposée connue (étalon de travail), sensiblement de même dimension (voisinage de mesure). L'étalon de travail peut être une pièce particulière de la production que l'on a retenue et promue au rang d'étalon après l'avoir mesurée finement, ou une pièce de forme géométrique plus simple (cales-étalons, cylindres étalons…).

En réalité, l'appareil a de fait un étalon embarqué (interne), mais il est de faible étendue. Il doit simplement permettre de couvrir l'étendue des écarts par rapport à l'étalon de travail. Ces appareils sont souvent appelés « comparateurs ». Par exemple, dans un comparateur mécanique d'étendue de mesure d'environ 10 mm, la crémaillère taillée dans la tige joue ce rôle d'étalon interne.

Figure 2.3 : Exemple de mesure de la longueur d'une pièce avec un comparateur mécanique et une cale-étalon

Dans l'exemple de la figure 2.3, l'incertitude sur le résultat de la mesure va dépendre entre autres de la qualité de la cale-étalon et du comparateur.

Mesure autonome (étalons internes)

Dans ce cas de mesure, l'appareil devra fournir un résultat seul. Cela nécessite un système d'étalons propres, embarqué dans la structure de l'appareil. Ce système doit permettre de couvrir l'étendue de mesure d'utilisation de l'appareil.

Exemples

- Pied à coulisse (règle gravée).
- Micromètre (vis micrométrique).
- Machine à mesurer tridimensionnelle (règle optique).

Terminologie

Nous préciserons simplement quelques termes utilisés régulièrement dans cet ouvrage. Pour la définition normalisée des différents termes, le lecteur est renvoyé au *Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de la métrologie*[1].

- **Mesurande :** valeur vraie de la grandeur à mesurer (par définition cette valeur ne sera jamais exactement connue).
- **Mesure :** valeur estimée du mesurande suite à un mesurage.
- **Mesurage :** activités permettant d'obtenir une mesure.
- **Étalon :** entité physique censée représenter en un lieu donné, le mieux possible, une fraction de l'unité de base. Au niveau de l'entreprise, on distinguera :
  – les **étalons de référence :** matérialisant la plus haute qualité métrologique de l'entreprise (généralement situés en métrologie centrale),
  – les **étalons de travail :** utilisés pour étalonner ou vérifier les appareils utilisés sur les sites de production. Ils sont eux-mêmes étalonnés par rapport aux étalons de référence (ou aux **étalons de transfert** quand il y a plusieurs niveaux d'étalons).
- **Intervalle de mesure :** correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre la grandeur à mesurer. Par exemple, pour un thermomètre [– 20 °C, + 80 °C], cela donne une étendue de mesure de 100 °C.
- **Répétabilité :** si la mesure est répétée plusieurs fois par le même opérateur, dans les mêmes conditions (même appareil et même laboratoire), dans un laps de temps court, l'estimation de la variance à partir des résultats permet de quantifier ce concept de répétabilité.
- **Justesse :** la justesse d'une méthode de mesure est estimée par la différence entre une valeur vraie de la grandeur mesurée et la moyenne des différents résultats de mesure, elle est exprimée en termes de biais.

1. VIM (*Vocabulaire international de la métrologie*) – Projet de norme AFNOR X07-001PR (PR NF ISO 99999 octobre 2006).

- **Sensibilité :** la mesure S (sortie) est fonction du mesurande E (entrée). Soit $S = f(E)$ la fonction correspondante. La sensibilité sera égale à la dérivée de cette fonction : $s = \frac{dS}{dE}$. Si s est une constante, l'appareil aura un comportement linéaire.
- **Chaîne de mesure :** suite des éléments de l'appareil conduisant le signal de mesure de l'entrée (capteur) jusqu'à la sortie (communication avec l'utilisateur).
- **Résolution :** la plus petite différence d'indication d'un dispositif afficheur qui peut être perçue de manière significative (*VIM*). La résolution est un indicateur de qualité de l'appareil, mais il ne faut pas se focaliser uniquement sur cet aspect et regarder le rapport résolution/étendue (pouvoir de résolution). Nous obtenons par exemple :

– *pied à coulisse* : $\frac{0{,}02}{150} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$,

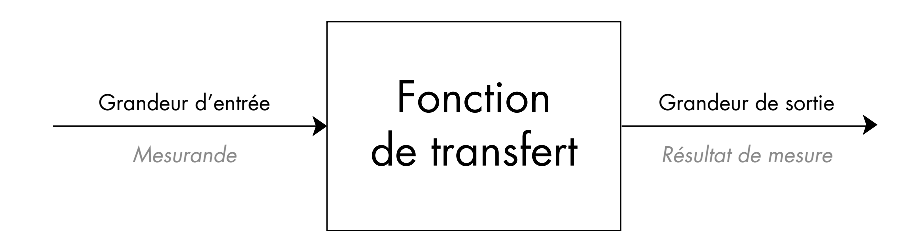
– *micromètre* : $\frac{0{,}01}{25} = 4 \cdot 10^{-4}$,

– *comparateur mécanique (course 10 mm)* : $\frac{0{,}01}{10} = 1 \cdot 10^{-3}$.

Notions de chaîne de mesure

L'appareil peut très bien être utilisé sans que l'on sache comment est traité le signal de mesure. On ne s'occupe alors que de la fonction de transfert entre l'entrée et la sortie (fig. 2.4).

Figure 2.4 : L'appareil de mesure considéré comme une « boîte noire »



La mesure n'est qu'une interprétation subjective de la réalité (mesurande). Pour être conscient de cette subjectivité (et éventuellement être capable d'esprit critique), il est souhaitable d'avoir une vue de l'ensemble des composants de la chaîne de mesure. Cette dernière peut être illustrée par les composants suivants (fig. 2.5).

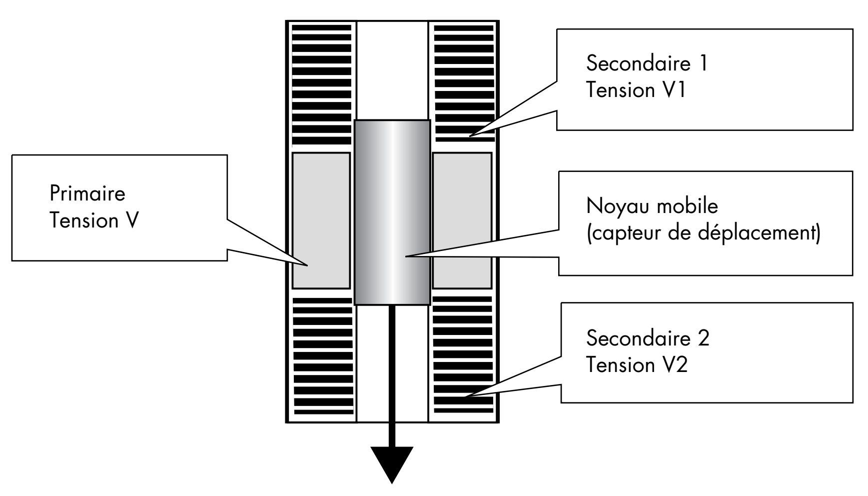
Figure 2.5 : Exemples d'éléments d'une chaîne de mesure

Capteur

C'est l'élément clef de la chaîne de mesure qui donne le signal de base. Les variations du mesurande doivent être « captées » de manière significative afin d'être « interprétées » par la suite. Cette saisie d'informations ne peut se faire souvent qu'avec un apport d'énergie extérieure (**énergie d'activation**). Par exemple, avec un pied à coulisse, il faut exercer une pression au niveau des becs pour garantir une bonne saisie. Cet apport d'énergie est nécessaire, mais peut également être néfaste en perturbant le mesurande que l'on veut quantifier (chapitre 4).

La conversion physique de la nature du signal commence souvent au niveau du capteur, par exemple convertir une grandeur mécanique en une grandeur électrique (fig. 2.6).

Figure 2.6 : Capteur LVDT
(*Linear Variable Differential Transformer*)



Amplificateur d'instrumentation

Le niveau énergétique dans l'environnement du capteur est souvent très faible et fortement influencé par les perturbations. Pour pouvoir communiquer avec l'utilisateur (enregistrement graphique, indicateur…), cela nécessite un seuil énergétique minimal. L'amplificateur doit fournir un nouveau signal le plus fidèle possible à l'original. Ce gain d'énergie est souvent obtenu à l'aide du réseau électrique ou pneumatique disponible dans l'entreprise.

Traitement du signal de mesure

Nous nous limiterons dans ce chapitre à indiquer deux modes de traitement : le filtrage et la conversion analogique/numérique. Pour plus de détails, le lecteur est convié à se reporter à des ouvrages spécialisés. L'analyse et le traitement mathématique des données seront repris dans les chapitres suivants.

Filtrage

Le filtrage est nécessaire lorsque le signal de mesure fourni est trop riche. Ce surplus d'information peut être vu comme une pollution vis-à-vis de l'objectif recherché. Il sera alors nécessaire de trier l'information fournie. Parfois, c'est l'inverse qui se produit, des informations utiles sont ignorées par le capteur qui ne les perçoit pas.

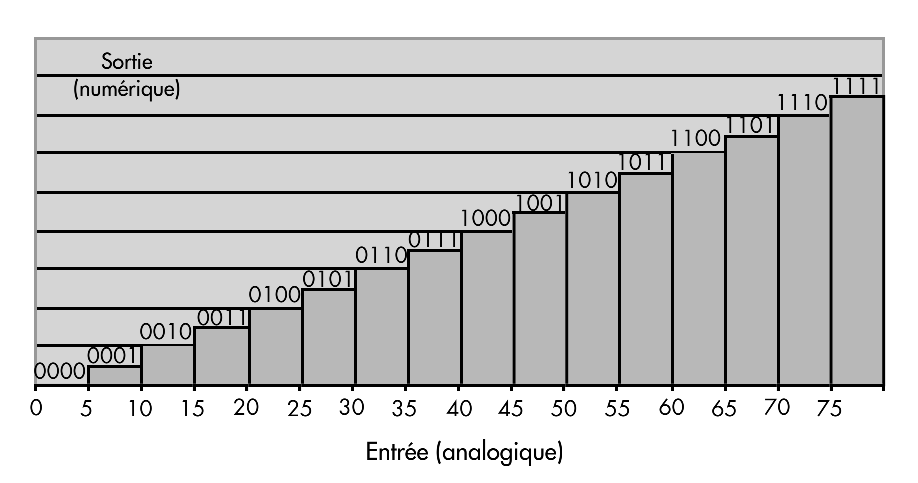
La mesure de la rugosité illustre bien cet aspect. La surface réelle palpée comporte des défauts de forme (premier ordre), des défauts d'ondulation (deuxième ordre), des défauts de rugosité (troisième ordre) et pour finir, des défauts d'ordre supérieur (arrachements par exemple). La technologie employée va engendrer de fait un filtrage. Par exemple, un palpage mécanique est tributaire de la forme du palpeur (rayon de pointe) et du type d'exploration de la surface (palpage avec ou sans patin). En fonction du critère que l'on veut mesurer (rugosité par exemple), cela nécessitera de choisir le filtre le plus adapté (par exemple : emploi d'un filtre gaussien surfacique ISO 16610-61) (fig. 2.7).

Figure 2.7 : Exemple de représentation de rugosité

Convertisseur analogique numérique

Le plus souvent le capteur traduit le signal d'entrée physique (déplacement, pression, température…) en un signal électrique de faible puissance sous forme analogique (signal continu). Pour des raisons d'affichage, de stockage d'information, de traitement par un calculateur il sera nécessaire de transformer cette grandeur analogique en une grandeur numérique à l'aide d'un codage (par exemple, code binaire naturel, code de GRAY, code DCB…) (fig. 2.8).

Figure 2.8 : Exemple de conversion analogique/numérique



Affichage – mémorisation de la mesure

L'appareil de mesure peut communiquer avec l'utilisateur sous différentes formes.

- La mesure est du type grandeur scalaire : un affichage à aiguille ou numérique est suffisant.
- La mesure est multi-composantes :
  - affichage à plusieurs cadrans (type multi-cotes),
  - affichage sous forme de graphe (diagramme de circularité sous forme de coordonnées polaires, rugosité…),
  - affichage sous forme de zones (relevé de température par thermographie),
  - écriture sous forme de fichier (fichier de points sur machine à mesurer tridimensionnelle) avec traitement informatique associé.

Les enregistrements (physiques ou informatiques) permettent de conserver une mémoire de cette information et de permettre un traitement ultérieur.

Chapitre 3

Gestion des moyens de mesure

Les entreprises utilisent beaucoup d'appareils pour garantir la conformité de leurs produits et pour évaluer la performance de leurs processus (conception et production). Pour cela, il faut avoir confiance dans les mesures obtenues. Les référentiels de systèmes qualité, de type ISO 9001, exigent que les appareils soient vérifiés régulièrement pour pouvoir assurer cette qualité de mesure. Cela demandera une gestion administrative et technique du parc d'appareils de contrôle.

La mise en œuvre de la gestion et de la maîtrise des moyens de mesure, doit s'accompagner d'une réflexion plus globale de la « fonction métrologie », portant sur la stratégie de suivi (gestion externe ou interne) et, d'une manière plus générale, sur l'importance d'une culture métrologique dans l'entreprise.

Situer sa « fonction métrologie »

Pour cette réflexion, il est souhaitable de répondre aux questions suivantes.

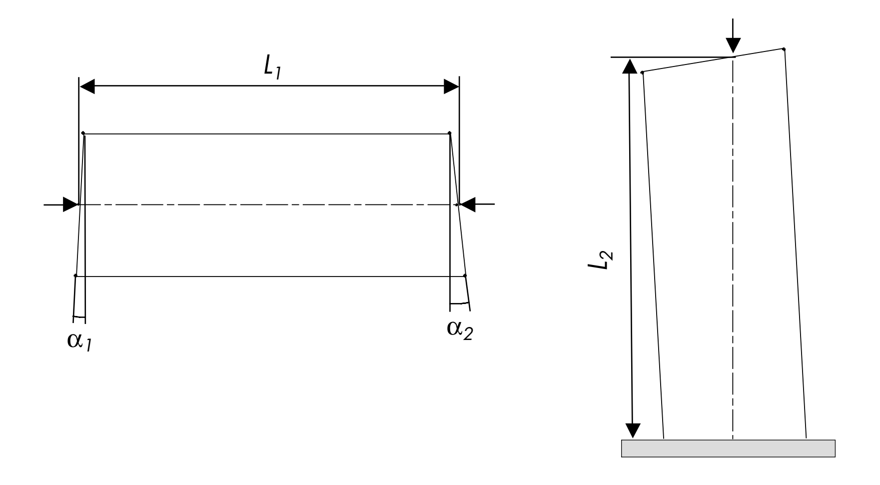
Est-ce que la qualité requise est bien spécifiée par mon client ?

Des disparités très fortes peuvent se rencontrer. On trouve des secteurs industriels où le produit est défini avec une grande rigueur. Par exemple, dans le secteur automobile où l'on peut avoir plusieurs fournisseurs (de langue et de culture différentes) pour un même produit, cela nécessite de préciser les variations de qualité acceptables en utilisant le mieux possible les normes internationales. Dans les entreprises de taille moyenne, où les études et la production cohabitent, il y a risque d'utiliser un langage de définition interne, pseudo-normalisé, engendrant des ambiguïtés. Enfin à l'extrême, il reste des secteurs où la description de la qualité relève du bon usage. Ce dernier cas est dangereux, car il engendre une subjectivité de décision de conformité, source d'une variabilité importante.

Est-ce que je comprends les exigences de mon client ?

Cela sous-entend que l'on parle le même langage et que celui-ci est suffisamment riche pour être le plus explicite possible. En toute rigueur, une définition de domaine de conformité ne devrait pas conduire à deux interprétations différentes. Par exemple, la lecture des spécifications géométriques du produit[1] nécessite de bien connaître la normalisation se rapportant à ce sujet. L'exigence à vérifier doit conduire au choix d'un appareillage de mesure approprié. Dans l'exemple suivant, la mesure d'une cale présentant deux défauts angulaires α_1 et α_2, ne donnera pas le même résultat suivant la technique de mesure utilisée. La décision de conformité exige de bien savoir ce que l'on veut réellement mesurer et ne pas se contenter de prendre l'appareil disponible (fig. 3.1).

Figure 3.1 : Extraction de longueur avec machine à mesurer monodimensionnelle et colonne de mesure



Quels moyens de mesure retenir et qui sera chargé de faire ces mesures (disponibilités, compétences) ?

La mesure n'apporte pas de valeur ajoutée physique au produit. À court terme, cela peut être perçu comme un investissement non prioritaire

1. NF EN ISO 14253-1 mars 1999, Spécification géométrique du produit (GPS) – Vérification par la mesure des pièces et équipements de mesure – Partie 1 : Règles de décision pour prouver la conformité ou la non-conformité à la spécification.

(souvent élevé) par rapport à des ressources de production. C'est un peu comme une assurance, l'investissement en ressources humaines et matérielles doit être mis en regard avec le risque de détection de produit non conforme chez le client. C'est un investissement rentable à long terme, cependant il faut éviter toute surenchère. Parfois, c'est le client, du fait de son poids économique, qui exigera tel ou tel moyen de contrôle. Dans le cas de transactions concernant les domaines du commerce, de la santé, de la sécurité et de l'environnement, les autorités publiques exigent une garantie de la qualité de la mesure, on parlera alors de **métrologie légale**[1].

Bien répondre à cette question est une source d'économie importante.

Comment s'assurer de la performance requise pour ces appareils, dans leur contexte de mesure ?

Il s'agit de valider un processus de mesure. La performance du moyen sera tributaire des composantes humaine et technique et perturbée par les influences du milieu dans lequel la mesure se réalise. Le résultat de mesure n'est qu'une image de la réalité. Pour que les décisions découlant de cette mesure soient fondées, il faut avoir une perception de la robustesse de cette dernière.

Comment vérifier qu'ils ne se dégradent pas dans le temps ?

Comme dans tout processus, des dérives en fonction du temps risquent d'apparaître. Il sera nécessaire de définir une fréquence de surveillance pour garantir que la performance de l'équipement ne s'est pas dégradée.

Commet gérer cette information ?

À ces questions techniques, il faut rajouter la partie administrative relative à la maîtrise des enregistrements pour prouver que ces vérifications ont bien eu lieu et ont été réalisées par un personnel compétent et accrédité.

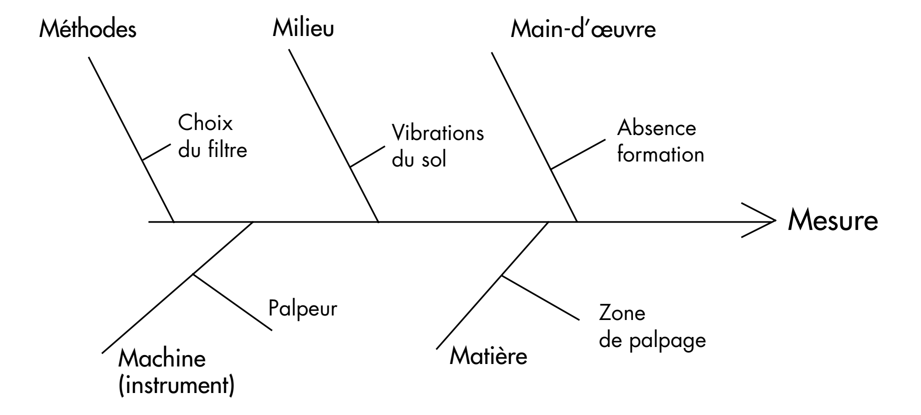
Tout cela dans un environnement économique souvent difficile. Il faut le juste nécessaire pour éviter toute surqualité.

1. Organisation internationale de la métrologie légale (OIML : *www.oiml.org*).

La confiance dans la mesure

La qualité de la mesure est définie par une approche de type 5M (cette analyse sera reprise en détail au chapitre suivant) (fig. 3.2).

Figure 3.2 : Exemple de démarche 5M pour une mesure de rugosité



Le MSA[1] retient une arborescence légèrement différente, mémorisée à l'aide de l'acronyme : **SWIPE** (*Standard, Work Piece, Instrument, Person/Procedure, Environment*).

L'instrument

Par instrument, il faut comprendre l'appareil, les équipements et les montages associés ainsi que les étalons utilisés.

Toutes les entreprises n'ont pas le besoin (ni les moyens) d'être au niveau de la définition du mètre étalon. Une copie de bonne qualité d'un sous-multiple, sous une forme physique plus accessible (boîte de cales par exemple), est suffisante, sous réserve qu'elle soit garantie par un organisme mandaté.

L'entreprise doit s'assurer que la maîtrise de la mesure est déclinée jusque sur les sites de production. Chaque site n'a pas forcément besoin

1. *Measurement Systems Analysis* : manuel développé sous la responsabilité de Daimler Chrysler Corporation, Ford Motor Company et General Motors Corporation (*www.carwin.co.uk/qs*).

des mêmes performances métrologiques. Il suffit qu'elles soient en adéquation avec la qualité requise par la définition du produit (sauf si l'entreprise possède l'appareil et désire tout simplement le rentabiliser).

Pour cela on utilise des appareils spécifiques ou standard qui devront, à une fréquence donnée, être comparés aux **étalons de référence** (c'est la plus haute qualité métrologique existante dans l'entreprise). Si la qualité métrologique exigée au niveau de l'appareil de mesure en production n'est pas très grande, on peut se contenter de le tester à l'aide d'étalons intermédiaires, sous réserve qu'ils soient vérifiés par rapport aux étalons de référence. Ces étalons sont appelés « **étalons de travail** ». On utilise parfois des « **étalons de transfert** » comme maillon secondaire dans la comparaison avec les étalons de référence. La gestion et la mise en place de ces tests et comparaisons constituent une **chaîne de mesure interne** (fig. 3.3).

Exemple

Imaginons une grande entreprise, implantée sur plusieurs sites. Elle possède une métrologie centrale au service des autres sites, une métrologie générale et des métrologies d'atelier dans chaque site respectif (fig. 3.3). Le raccordement aux étalons nationaux sera développé au paragraphe suivant (chaîne nationale d'étalonnage).

Figure 3.3 : Notion de chaîne d'étalonnage interne

Toutes les entreprises n'ont pas les moyens techniques et financiers pour mettre en place une chaîne de mesure aussi conséquente. Elles peuvent faire vérifier (ou étalonner) tout ou partie de leurs appareils de mesure par un fournisseur de prestations métrologiques apportant les garanties nécessaires de liaison aux étalons nationaux. Rappelons le paragraphe *a* du chapitre « 7.6 Maîtrise des dispositifs de surveillance de mesure » de la norme ISO 9001[1] :

> « […] Lorsqu'il est nécessaire d'assurer des résultats valables, les équipements de mesure doivent être :
>
> *a*) étalonnés ou vérifiés à intervalles spécifiés ou avant leur utilisation, par rapport à des étalons de mesure reliés à des étalons de mesure internationaux ou nationaux (lorsque ces étalons n'existent pas, la référence utilisée pour l'étalonnage doit faire l'objet d'un enregistrement) ;
>
> […] »

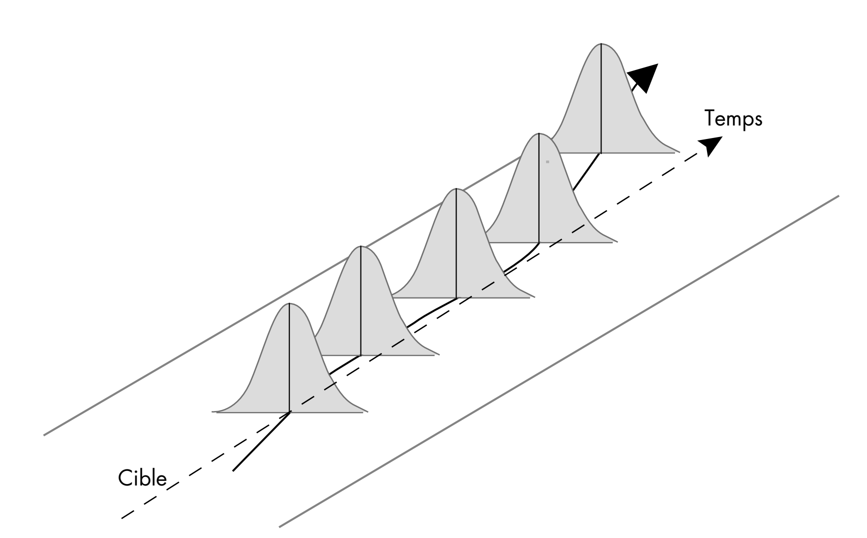
Le milieu

Avec l'instrument, c'est le second facteur qui vient spontanément à l'esprit, lorsque l'on rencontre des problèmes de qualité de mesure. En particulier, en cas de problèmes de métrologie dimensionnelle, l'influence de la température est souvent perçue comme la cause majeure, alors que la contribution des autres « M » est peut-être plus importante et nettement moins coûteuse à corriger.

L'influence du temps peut engendrer une augmentation de la dispersion des mesures, mais également une dérive (fig. 3.4). Elle est également appelée **constance** ou **stabilité**.

1. Reproduction faite avec l'autorisation d'AFNOR.

Figure 3.4 : Influence du temps (constance)



La main-d'œuvre et la méthode

Ces deux « M » nous semblent inséparables. En plus de l'aptitude physique (dextérité, sens expérimental), une formation scientifique et technique est nécessaire pour faire des mesures de qualité. Elle s'appuie sur des connaissances technologiques et normatives. En effet, si l'on est censé valider une conformité, cela va de soi que l'on comprend ce que demande le client (par exemple avec l'emploi des normes GPS).

L'auto-maîtrise dans un processus de production impose de normaliser le sous-processus de mesure (appelé également protocole de mesure). Dans bien des secteurs, souvent avec une main-d'œuvre très compétente, ce point est négligé, car cela semble faire offense aux opérateurs. Pourtant suite à des études GRR (chapitre 7), on constate que des différences de comportement mineures, *a priori* sans influence, engendrent une variabilité de mesure forte. D'où l'importance de la communication entre les différents opérateurs sur les méthodes de mesure retenues (réunions, supports visuels, instructions…).

La matière (pièce)

L'incidence de la pièce peut provenir de :

- ses qualités physiques (par exemple de la souplesse du matériau) ;
- de l'interaction « opérateur-matière ». Par exemple, un opérateur recherchera systématiquement le diamètre maximum pour une pièce ovalisée, et ceci de façon intuitive ;
- de sa définition de conformité lorsque des caractéristiques sont liées.

Il est dangereux de chercher à quantifier séparément l'influence de chaque « M ». Une démarche type « Analyse de la variance » peut être retenue pour voir s'il y a des interactions (chapitre 6).

Chaîne nationale d'étalonnage

La traçabilité des raccordements, fruit de deux organismes, permet :

- de retrouver les enregistrements d'étalonnage à différents niveaux, de l'entreprise au niveau national, c'est la garantie du COFRAC ;
- de garantir le lien physique avec les étalons nationaux, c'est le rôle du LNE.

Le Comité français d'accréditation (COFRAC[1])

Le rôle du COFRAC est d'accréditer les organismes délivrant des certifications. L'accréditation d'un laboratoire est la reconnaissance d'une certaine compétence dans un domaine précis (par exemple, vérification des tampons filetés de diamètre 5 mm à 20 mm) et l'assurance de la pérennité de cette compétence par un organisme faisant lui-même autorité en la matière (par exemple, système de management de la qualité suivant le référentiel NF EN ISO/CEI 17025 : septembre 2005[2] pour le laboratoire accrédité).

---

1. *http://www.cofrac.fr.*
2. NF EN ISO/CEI 17025 septembre 2005, Exigences générales concernant la compétence des laboratoires d'étalonnages et d'essais.

En simplifiant, on peut dire que l'accréditation « COFRAC » apporte *la garantie que les laboratoires retenus (possédant cette accréditation) sont fournisseurs de prestations de qualité car ils possèdent une technologie adéquate et qu'ils mettent en œuvre un suivi documentaire prouvant le lien métrologique des étalons du client aux étalons nationaux*. Cette accréditation n'est pas imposée par l'ISO 9001, cela simplifie l'audit[1] pour la partie métrologie.

Il existe une reconnaissance mutuelle entre divers organismes d'accréditation[2], c'est-à-dire que l'on estime que les écarts constatés entre ces laboratoires ne sont pas significatifs.

Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE[3])

Pour assurer la confiance dans l'appareil utilisé, celui-ci doit être étalonné. Cet étalonnage se fera souvent à l'intérieur de l'entreprise en référence aux étalons de la métrologie centrale (étalons de référence).

Cette confiance ne sera totale que si l'on peut valider les étalons de l'entreprise. Le LNE a mis en place les structures et procédures permettant d'assurer la valeur technique et scientifique des étalonnages et de fournir une garantie officielle.

Le Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) remplace depuis le 27 janvier 2005 le Bureau national de métrologie (BNM), organisme interministériel, qui avait été créé en 1969. Fédérant les laboratoires de recherche détenant les étalons nationaux, le LNE a une mission de soutien technique et scientifique à l'industrie et au monde de la recherche. Il contribue également au développement des programmes de métrologie européens et internationaux.

Les quatre laboratoires nationaux sont :

- LNE (Laboratoire national de métrologie et d'essais) ;
- LNHB (rattaché au Commissariat à l'énergie atomique) ;

1. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter *L'Audit de la métrologie dans le cadre des certifications de systèmes de management*, Collège français de métrologie, septembre 2005.
2. *www.european-accreditation.org*.
3. *www.lne.fr*.

- INM (rattaché au Conservatoire national des arts et métiers) ;
- SYRTE (rattaché à l'Observatoire de Paris).

Les laboratoires accrédités

Des organismes intermédiaires sont chargés de divulguer la métrologie à différents niveaux. Cela permet une approche plus efficace et plus économique.

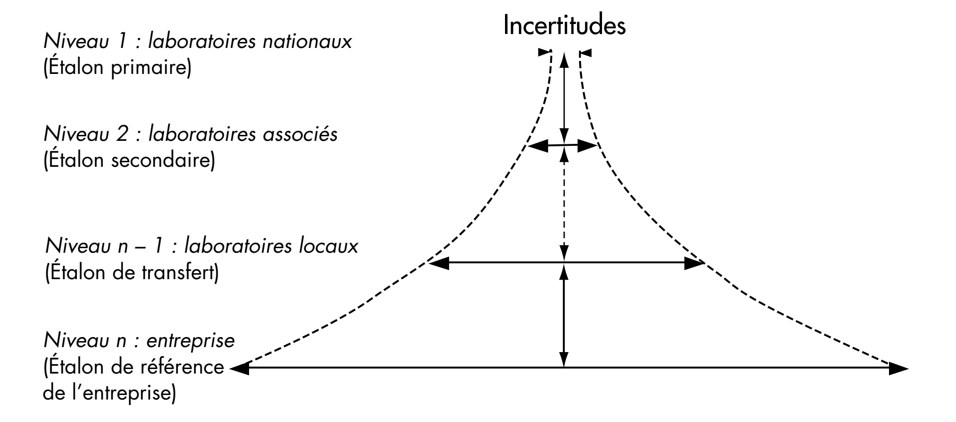
En 1977, on avait précisé les maillons intermédiaires de la chaîne d'étalonnage entre le BNM et les entreprises en créant :

- des centres d'étalonnage agréés ;
- des services de métrologie habilités.

Dans le souci d'une harmonisation européenne, il n'y aura plus de label CEtA ou SMH, mais simplement des *laboratoires accrédités par le COFRAC*. Ces laboratoires, en situation concurrentielle, doivent faire la preuve que leur niveau d'incertitude est bien en conformité avec les prestations qu'ils fournissent (de petits laboratoires peuvent atteindre, dans un domaine particulier, un savoir-faire métrologique très pointu). Ils doivent pour cela être raccordés à un laboratoire accrédité d'incertitude plus faible. Si ce n'est pas possible, ils se raccordent alors directement aux laboratoires nationaux ou aux laboratoires associés.

En simplifiant, on peut illustrer la dissémination de la métrologie à l'aide de la figure 3.5.

Figure 3.5 : Évolution des incertitudes

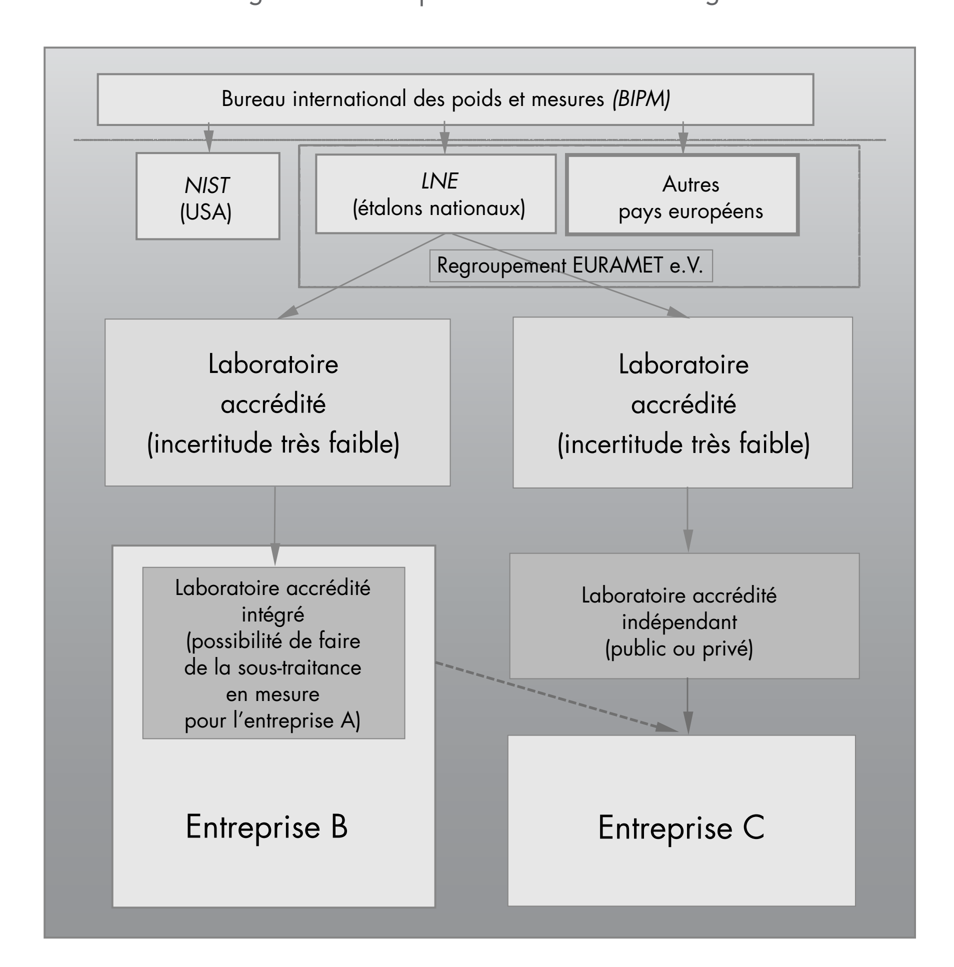


L'objectif de cette chaîne de mesure est de quantifier la croissance de l'incertitude de l'étalon primaire à l'étalon de référence de l'entreprise.

Choix d'une stratégie d'étalonnage

Le rattachement aux étalons nationaux[1] nécessite à partir d'un certain seuil une externalisation des étalonnages. Reste le problème de savoir à quel niveau la faire. En simplifiant, on peut envisager deux solutions (fig. 3.6).

Figure 3.6 : Exemples de chaînes d'étalonnage



1. *http://www.metrologiefrancaise.fr.*

En dehors de l'aspect stratégique de conserver ou non un savoir métrologique d'étalonnage, ce choix peut être dicté par des considérations économiques :

- raccordement externe (facturation de l'ordre de vérification, coût d'abonnement…) ;
- raccordement interne (formations et salaires, coût des équipements, locaux adaptés, veilles normatives…).

Les laboratoires (internes ou externes) peuvent être considérés comme des fournisseurs. Ils fournissent une prestation métrologique. Pour garantir la satisfaction du client (au niveau organisation et compétence technique), il doivent mettre en place une démarche qualité. Cette démarche s'appuiera sur un référentiel de système qualité reconnu ayant fait ses preuves. De nombreuses normes et guides concernent les laboratoires, on peut citer en particulier :

NF EN ISO/CEI 17025 (septembre 2005) : Exigences générales concernant la compétence des laboratoires d'étalonnages et d'essais

Bâtir son système qualité sur cette norme, permet de garantir :

- l'efficacité du management du laboratoire (dans l'esprit de l'ISO 9001 : 2000[1]) ;
- la compétence scientifique et technique (qualité des ressources humaines et matérielles ainsi que des méthodes retenues).

Avoir son système qualité construit en accord avec ce référentiel sera une aide précieuse pour se faire accréditer.

NF EN ISO 10012 (septembre 2003) : Exigences pour les processus et les équipements de mesure

Au sein de l'entreprise, la norme ISO 9001 : 2000 préconise un management de l'entreprise par une approche processus, avec la volonté de satisfaire le client après avoir bien compris ses exigences. L'idée générale est d'appliquer la même méthodologie aux processus de mesure qu'aux autres processus. On retrouve les mêmes chapitres que dans la norme

1. NF EN ISO 9001 décembre 2000, Systèmes de management de la qualité – Exigences.

ISO 9001, seul le chapitre 7 est réintitulé « Confirmation métrologique et mise en œuvre des processus de mesure ». On retrouvera entre autres dans ce chapitre 7, des recommandations sur la périodicité d'étalonnage, la maîtrise des équipements et logiciels, la conception des appareils, l'estimation des incertitudes, etc.

La mesure, un état d'esprit

Le concept mesure ne concerne pas uniquement l'opérateur métrologue. Ce concept doit être intégré de la conception à l'élaboration du produit. En particulier :

- le bureau d'études ne doit pas définir des paramètres ou des caractéristiques non quantifiables. Il doit aussi estimer le mieux possible les variations acceptables, compatibles avec un fonctionnement correct du mécanisme (fonction perte de Taguchi). Cette distribution des tolérances doit être faite avec l'aide d'experts en production. Citons dans cet esprit la démarche GPS (spécification géométrique des produits) qui a comme objectif d'être un langage unique (cohérence des différentes normes) pour tous les services, des études au contrôle final ;
- le service méthodes doit vérifier la compatibilité entre les valeurs de définition et les capacités des moyens de production et de contrôle (notion de capabilité). Suite à cette analyse, « les cotes de fabrication à risques » devront être bien répertoriées et clairement indiquées sur les plans de surveillance en fabrication. Les autres cotes pourront être contrôlées avec une fréquence beaucoup plus faible ;
- les métrologues de terrain doivent garder un esprit critique (constructif) pour l'utilisation des moyens de contrôle et savoir estimer leur incertitude de mesure. Tout constat de dérives ou de rebut élevé doit être répertorié et l'information retournée aux services de conception et de production concernés ;

- le service métrologie doit s'équiper (achat ou construction) d'un matériel compatible avec les exigences de qualité requises mais en évitant un degré de précision de mesure excessif (besoin réel). Grossièrement, le coût des appareils de mesure est une fonction puissance de l'inverse de la résolution.

Mise en place d'une gestion des moyens de mesures

Dans ce paragraphe, nous étudierons l'aspect purement gestionnaire. L'aspect maîtrise de l'aptitude à l'emploi (notion de conformité) des équipements de contrôles, de mesures et d'essais sera traité dans les chapitres suivants.

Identification et inventaire des appareils

Rappelons que la norme ISO 9001[1] demande de :

> « déterminer […] les dispositifs de surveillance et de mesure nécessaires pour apporter la preuve de la conformité du produit aux exigences déterminées ».

A priori, tous les appareils ont une incidence, ils ont été achetés dans un but bien précis qui a toujours un lien plus ou moins direct avec le produit.

Pour cette identification, on peut faire des classes correspondant au risque encouru sur le produit en cas d'information erronée dans la mesure. Par exemple, un ohmmètre, destiné à la maintenance dans une industrie de sous-traitance mécanique, ne demande pas un suivi attentif. Les appareils non identifiés sont considérés comme des indicateurs (par exemple, un réglet pour un préréglage de machine). L'identification peut se résumer à un point de couleur précisant que ces appareils ne sont pas suivis.

1. Reproduction faite avec l'autorisation de l'AFNOR.

Le code d'identification contient plus ou moins d'informations (site d'affectation, type, service…). Il permet d'identifier l'appareil (inscription indélébile sur l'appareil si possible) et d'avoir accès à la fiche de vie et au dossier le concernant (par exemple : PC 011 pour le 11e pied à coulisse acheté).

L'inventaire des appareils de mesure de l'entreprise représente une somme de travail importante. Dans certaines entreprises, l'appareil de mesure est perçu comme un bien précieux et *personnel* dans lequel on a une confiance parfois aveugle. En plus de l'aspect technique, il faut expliquer le bien-fondé de la démarche pour lever toute réticence d'identification.

Cette tâche permet de bien cerner les besoins métrologiques de l'entreprise et éventuellement d'éviter des doublons pour les acquisitions futures. En particulier, on pourra étudier l'évolution en analysant les dates d'acquisition.

Cet inventaire donne également la possibilité de faire du tri. On conserve parfois des appareils pour une hypothétique et peu probable utilisation. Cela coûte cher en immobilisation et est contraire à la méthode des 5S.

Il arrive que des appareils peu utilisés doivent être maintenus car on ne trouve pas une prestation identique sur le marché. De plus, certaines entreprises pensent qu'il est stratégique de garder une compétence métrologique importante. Comme nous l'avons déjà signalé, il peut être opportun alors de fournir des prestations métrologiques pointues à l'aide de ce matériel à des tiers.

Indicateurs de qualité d'un appareil

La performance métrologique est quantifiée par les notions de justesse et de fidélité. L'écart de justesse sera estimé par l'opération d'étalonnage ou borné par l'opération de vérification[1]. La fidélité, paramètre de dispersion, devra être explicitée plus finement. On retrouvera par exemple les

1. NF EN ISO 10012 septembre 2003, Systèmes de management de la mesure – Exigences pour les processus et les équipements de mesure.

notions de répétabilité et de reproductibilité (on remarquera une analogie assez forte avec la maîtrise statistique du produit). Cela va provoquer un flou dans l'exactitude de l'expression de la mesure, appelé « incertitudes ». Nous consacrerons les chapitres 7 et 8 à l'étude des incertitudes avec comme objectif principal de vérifier l'adéquation « tolérances-incertitudes ».

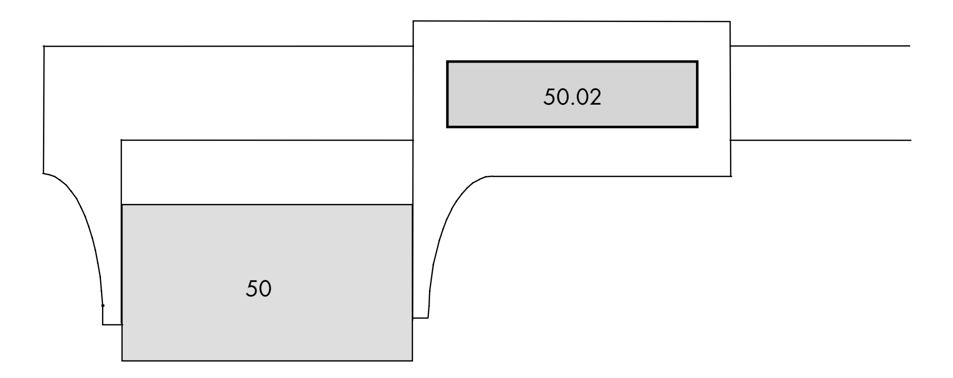
Il existe beaucoup d'autres paramètres pour caractériser les appareils de mesure et de contrôle. Pour plus d'information et surtout d'exactitude dans le choix des termes retenus, le lecteur est renvoyé au *Vocabulaire international de la métrologie* (VIM).

Il faudra vérifier que ces qualités ne se dégradent pas au cours du temps. Il sera nécessaire de mettre en œuvre un suivi des appareils de mesure (chapitre 9).

Étalonnage ou vérification des appareils

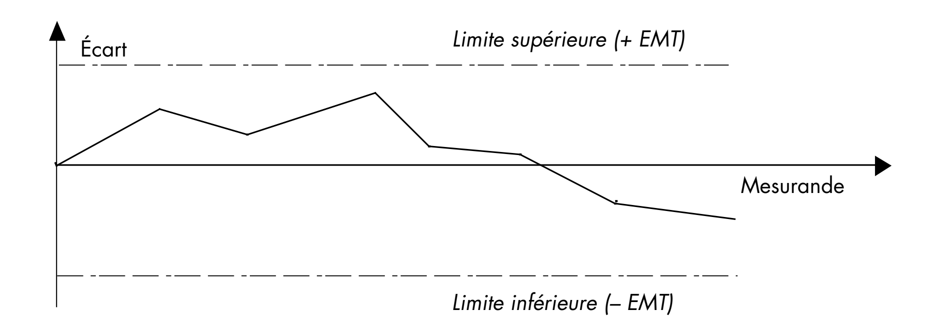
L'**étalonnage** a comme objectif d'essayer d'exprimer une valeur vraie (jamais exactement connue). Imaginons par exemple une cale sans aucune inscription. En la comparant à des étalons situés en amont dans la chaîne d'étalonnage, on pourra graver la longueur estimée sur la cale. Pour un appareil qui donne la mesure directement (un pied à coulisse par exemple), on comparera le résultat fourni par l'appareil avec une valeur supposée vraie de l'étalon. On en déduira une correction (positive ou négative) à appliquer aux résultats fournis par l'appareil. Une démarche à partir de statistiques affinera l'estimation de la correction. Un étalonnage nécessite de relativement bien maîtriser les grandeurs d'influences perturbatrices (fig. 3.7).

Figure 3.7 : Exemple d'étalonnage



La **vérification** ne cherche pas à garder une connaissance intrinsèque de l'appareil. Elle a comme objet de maintenir ou de rejeter l'appareil. Cette décision est prise par le vérificateur à l'aide de la position relative de la courbe de correction obtenue en mesurant différents « mesurandes étalons » par rapport aux limites d'écarts maximum tolérées (fig. 3.8). La vérification entraîne une perte d'information, qui devient binaire (appartenance ou non à la zone acceptable). Comme par la suite, on ne sait plus comment on est positionné à l'intérieur des limites d'erreurs tolérées, on associera souvent à cette position une distribution uniforme.

Figure 3.8 : Exemple simplifié de courbe de correction



La notion d'*écart maximum toléré* (EMT) représente un indice de performance (par exemple le 1/10 ou le 1/100 de mm). L'EMT est défini par rapport à l'objectif de qualité du produit que l'on doit surveiller (voir la notion de capabilité traitée au chapitre 7). L'appareil sera déclaré conforme ou non, on n'enregistrera pas les écarts constatés.

Dans le cas d'étalonnages internes, il faut définir des procédures d'étalonnage (certaines procédures sont normalisées, il est préférable de les utiliser). L'approche ISO « Spécification géométrique des produits (GPS) » s'intéresse non seulement à la définition du produit mais également à sa vérification. Par exemple, pour le comparateur mécanique à cadran, on pourra consulter la norme *NF EN ISO 463 : juin 2006*.

Cas de la sous-traitance (vérification externe)

Cette activité de suivi, d'étalonnage ou de vérification de tout ou partie des appareils n'est pas toujours possible en interne dans l'entreprise. Elle demande beaucoup de temps et des moyens humains et techniques qui peuvent faire défaut. Il est possible de contacter un laboratoire de métrologie pour sous-traiter tout ou partie de ces tâches. Par exemple, si l'entreprise possède de nombreux appareils identiques, l'étalonnage de ceux-ci pourra se faire en interne, à l'aide de cales-étalon vérifiées en externe. L'organisme doit, soit s'assurer par des audits que le laboratoire, en position de fournisseur, présente la garantie métrologique nécessaire, soit que le laboratoire possède l'accréditation COFRAC correspondant aux besoins. Dans ce second cas, la traçabilité du raccordement aux étalons nationaux est alors garantie.

Suivi du matériel[1]

Une dérive des moyens de mesure risque d'entraîner une dérive de la production. Pour éviter ce danger potentiel coûteux, il faut étalonner ou vérifier régulièrement les appareils de mesure. Reste le problème de savoir à quelle fréquence faire ces vérifications (chapitre 9).

1. Références normatives :
– FD X07-018 décembre 1997, Métrologie – Métrologie dans l'entreprise – Fiche de vie des équipements de mesure, de contrôle et d'essai ;
– NF EN ISO 10012 septembre 2003, Systèmes de management de la mesure – Exigences pour les processus et les équipements de mesure.

Déclaration de conformité

À l'issue de chaque vérification, l'appareil peut être :

- maintenu pour l'utilisation prévue (conformité) ;
- ajusté ou réparé et remis en service ;
- déclassé (utilisation nécessitant une précision plus faible) ;
- mis au rebut.

Les deux derniers cas relèvent de la maîtrise de produits non conformes, ils doivent être clairement identifiés.

Documents de suivi

La vérification engendre un **constat de vérification**[1] **précisant le maintien ou non de l'appareil dans le service concerné. L'étalonnage donne un document d'étalonnage**[2] caractérisant l'appareil.

Une étiquette (ou plaque) de confirmation permet immédiatement à l'utilisateur ou à l'auditeur de connaître pour chaque appareil son code, sa validité et sa date limite d'utilisation (fig. 3.9).

Figure 3.9 : Exemple d'étiquette de confirmation

Affectation : ....

Référence : ....

Étalonné le : ....

Date de validité : ....

Cette étiquette doit être si possible solidaire de l'appareil (auto-adhésive ou à œillet ou marquage indélébile).

1. X07-011 décembre 1994, Métrologie – Essais – Métrologie dans l'entreprise – Constat de vérification des moyens de mesure.
2. FD X07-012 novembre 1995, Métrologie – Métrologie dans l'entreprise – Certificat d'étalonnage des moyens de mesure.

On utilise parfois un système simplifié utilisant des points de couleurs (peinture indélébile). Chaque couleur fait référence à un échéancier qui associe une année de fin de validation de l'appareil à une couleur spécifique.

Une fiche de vie[1], référencée par l'étiquette, permet de connaître exactement l'historique de l'appareil (entretien, maintenance, réparation, étalonnage, déclassement, concepteur, fournisseur, etc.). Une gestion documentaire gère cette fiche en assurant le suivi et planifie automatiquement les intervalles de vérification ou d'étalonnage. Elle permet également d'accéder au dossier technique de l'appareil.

Il existe de nombreux logiciels facilitant cette tâche de gestion. Ils assurent par exemple les missions suivantes :

– état du stock (en service, en vérification, réformés…) ;
– édition d'une fiche de vie d'un appareil ;
– prochain ordre de vérification, liste des retards… ;
– aide à la détermination des fréquences de vérification ;
– etc.

Cette gestion des moyens de mesure, avec les suivis et ordres de vérification, peut être complètement externalisée. Beaucoup de fournisseurs de logiciels proposent cette option.

Formation du personnel

Le meilleur des matériels n'est rien si l'on ne maîtrise pas son emploi. Les mesures deviennent souvent très complexes du fait des caractéristiques à vérifier (tolérances géométriques par exemple), des techniques employées (métrologie tridimensionnelle) et de la culture mathématique associée (statistiques, analyse du signal…).

Même avec une technologie simple à mettre en œuvre, il est toujours bon de prendre quelques instants pour s'assurer que l'opérateur a bien compris sa mission et qu'il possède suffisamment d'informations pour garantir le respect de l'auto-maîtrise sur son poste de travail.

1. FD X 07-018 décembre 1997, Métrologie dans l'entreprise – Fiche de vie des équipements de mesure, de contrôle et d'essai.

Chapitre 4

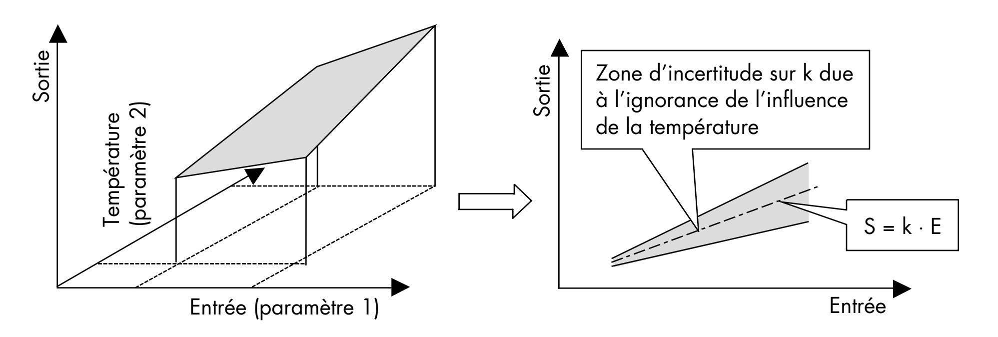
Erreurs de mesurage

Lors d'un mesurage, le résultat de la mesure va être perturbé par différentes grandeurs d'influence engendrant des erreurs. Nous ne chercherons pas, dans ce chapitre, à quantifier les incertitudes associées à ces erreurs, mais simplement à donner des méthodes et règles d'analyse pour le métrologue, en recherchant les causes et comment les minimiser, voire les supprimer.

Analyse des sources d'erreurs

Le mesurage (ou processus de mesure) est sensible à certains paramètres. Une partie de ces paramètres est immédiatement identifiée par le métrologue. L'autre partie est plus sournoise, au sens où le métrologue n'en a pas forcément conscience. Cela va augmenter la part d'aléatoire sur les paramètres recensés, par ignorance de l'effet des paramètres non pris en compte (fig. 4.1).

Figure 4.1 : Exemple de la non-prise en compte de l'influence de la température



Recherche des influences par la méthode des 5 M[1]

Les paramètres influents sont classés en cinq types :

- influence de l'appareil et des composants associés (*machine ou moyen de mesure*) ;
- influence de l'opérateur (*main-d'œuvre*) ;
- influence de la matière (*matière ou mesurande*) ;
- influence de l'environnement (*milieu*) ;
- influence de la procédure de contrôle (*méthode*).

> ***Rappel :*** *le MSA[2] retient un découpage légèrement différent en distinguant les étalons de l'appareil et en rattachant la méthode et l'opérateur. Il est mémorisé à l'aide de l'acronyme : SWIPE (Standard, Work Piece, Instrument, Person/Procedure, Environment).*

Il est parfois difficile de pouvoir partager les influences aussi nettement. En particulier, la *méthode*[3] de mesure peut être étroitement liée (interactions) à :

- *la main-d'œuvre* : en dehors de l'expertise physique, il faut tenir compte de la compétence intellectuelle qui permettra de bien appliquer les méthodes retenues ;
- *le moyen de mesure* : de plus en plus de logiciels embarqués, qui appliquent des méthodes de calcul et d'optimisation, font partie de l'instrument (par exemple, choix du type de filtrage pour calculer un critère de rugosité) ;
- *la matière ou mesurande* : par exemple, pour la prise d'un diamètre sur un axe, l'opérateur recherchera systématiquement le diamètre maximum dans le cas d'ovalisation ;

1. Duret D., Pillet M., *Qualité en production. De l'ISO 9000 à Six Sigma*, Paris, Éditions d'Organisation, 3e éd., 2005.
2. *Measurment Systems Analysis* : manuel développé sous la responsabilité de Daimler Chrysler Corporation, Ford Motor Company et General Motors Corporation (*www.carwin.co.uk/qs*).
3. Breissand G., « Une vision industrielle de la métrologie », *Contrôles, Essais & Mesures*, janvier 2004 propose la répartition suivante : mesurande (10 %), instruments (5 %), opérateur (15 %), milieu (20 %) et méthode (50 %).

- *le milieu* : une méthode de mesure est au moins systématiquement perturbée par une grandeur d'influence particulière. Si celle-ci est faible, elle sera négligée sous réserve que l'on ne recherche pas une finesse de mesure trop élevée (par exemple, l'influence de la poussée d'Archimède sur la mesure de masse).

Comment lutter contre les grandeurs d'influence

On peut recenser quatre méthodes pour contrer l'influence des grandeurs perturbatrices. On peut procéder par :

- **élimination :** c'est la méthode la plus radicale mais souvent la plus onéreuse (par exemple, un laboratoire climatisé). De plus dans certaines situations, cette élimination est impossible (mesure sur site industriel). Par contre lorsque l'on donne un résultat, il faut garder à l'esprit que ce résultat correspond de fait à des niveaux bien définis des grandeurs d'influence de l'environnement. Par exemple, lorsque l'on caractérise la longueur d'une pièce, cela suppose[1] que :
  - la température est à 20 °C,
  - la pression atmosphérique est de 101325 Pa,
  - l'humidité relative est d'environ 55 %,
  - l'effort de mesurage est nul,
  - la pièce n'est pas contrainte par l'ablocage,
  - etc. ;
- **insensibilisation :** l'appareil de mesure est insensible à la grandeur d'influence. Par exemple pour un instrument en *invar*[2] à très faible coefficient de dilatation, les variations de température ne sont pas perturbatrices ;

1. Voir NF E 10-100-1 décembre 2002, Spécification géométrique des produits – Méthode de mesurage dimensionnel.
2. Invar (TM) est une marque déposée d'Imphy Alloys depuis 1907. C'est un acier à forte teneur en nickel (36 %). Son coefficient de dilatation est de l'ordre de 1.10^{-6} K^{-1}.

- **compensation :** on cherche à combiner deux signaux de mesure de manière à ce que le signal résultant (une somme algébrique par exemple) ne soit pas perturbé. Cette combinaison permet de s'astreindre à l'influence de certaines grandeurs perturbatrices comme la température (par exemple, balancier compensé en horlogerie) ou le posage (développée au chapitre 5) ;
- **correction :** c'est la solution la plus ambitieuse. Elle nécessite d'avoir modélisé l'influence étudiée. Il peut s'agir d'une correction mathématique ou physique (par exemple, came linéaire mise en parallèle d'une vis pour corriger les erreurs de pas en agissant sur l'indexation du vernier).

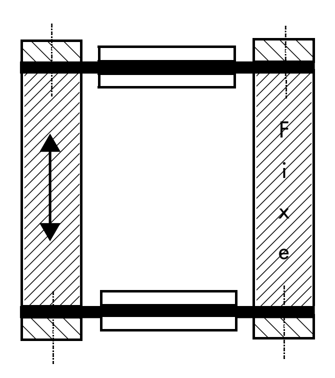
Sans être exhaustifs, nous donnerons à titre d'exemples quelques applications des méthodes précédentes appliquées à l'influence de l'instrument de mesure et à l'influence du milieu. L'influence globale du posage est très importante en métrologie dimensionnelle, nous l'étudierons en détail dans le chapitre 5.

Influence du moyen de mesure

Par moyen de mesure, nous considérons bien sûr l'appareil, mais également les matériels annexes comme un marbre, un support, une potence, etc.

Les appareils de mesure paraissent lourds et massifs. Cela vient du fait qu'ils sont calculés en déformations et non en contraintes. Les liaisons mécaniques sont réalisées avec un jeu très faible. Il est possible d'utiliser, lorsque l'on n'a besoin que de faibles courses, la déformation de lames métalliques (par exemple, accéléromètres, montages de comparateurs…) (fig. 4.2).

Figure 4.2 : Liaison glissière réalisée par déformation de lames métalliques

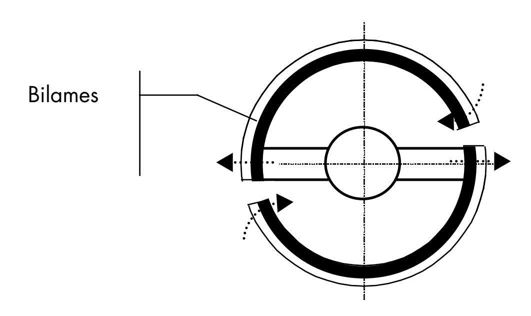


Le concepteur d'appareil de mesure cherche autant que possible à supprimer les erreurs liées à l'appareil par **élimination**, c'est-à-dire qu'il vise un appareil parfait. Pour cela, il doit se préoccuper :

- des erreurs de lecture (par exemple, défaut de parallaxe) ;
- des erreurs de mobilité (incidence du frottement, phénomène de *stick slip*) ;
- de la géométrie des palpeurs (filtrage ou non des défauts de rugosité, par exemple) ;
- de la vitesse d'accostage lors de palpages mécaniques sur une machine à mesurer tridimensionnelle. On constate souvent des différences significatives entre la première mesure faite manuellement et celles faites en automatique à vitesse normale (bien souvent de meilleure qualité) ;
- de la qualité géométrique des mécanismes (jeux et dispositions relatives). Ernst Abbe a établi un principe de conception qui est toujours d'actualité ;
- des efforts retenus au niveau du contact (capteur) avec la pièce ;
- etc.

Les dilatations dues à la température modifient la structure. On rencontre parfois l'utilisation de bilames (juxtaposition de deux matériaux de coefficient de dilatation différent) qui vont permettre en se déformant, de conserver une longueur ou un moment d'inertie. Nous verrons d'autres utilisations aux niveaux des posages utilisant ce principe de **compensation** (fig. 4.3).

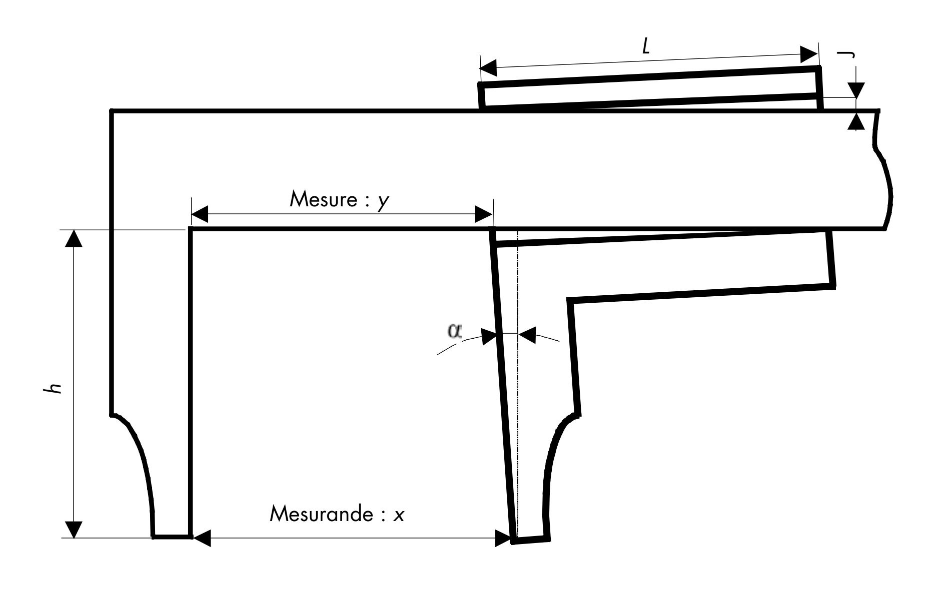
Figure 4.3 : L'inertie de ce volant est pratiquement insensible à l'augmentation de température



Principe d'Abbe[1]

« Le système de mesure doit être placé dans le prolongement (coaxialement) de la pièce à mesurer (mesurande). » Pour illustrer ce concept, nous retiendrons un pied à coulisse, appareil qui ne respecte pas le principe d'Abbe (fig. 4.4).

Figure 4.4 : Incidence du jeu *J* sur la mesure pour le pied à coulisse



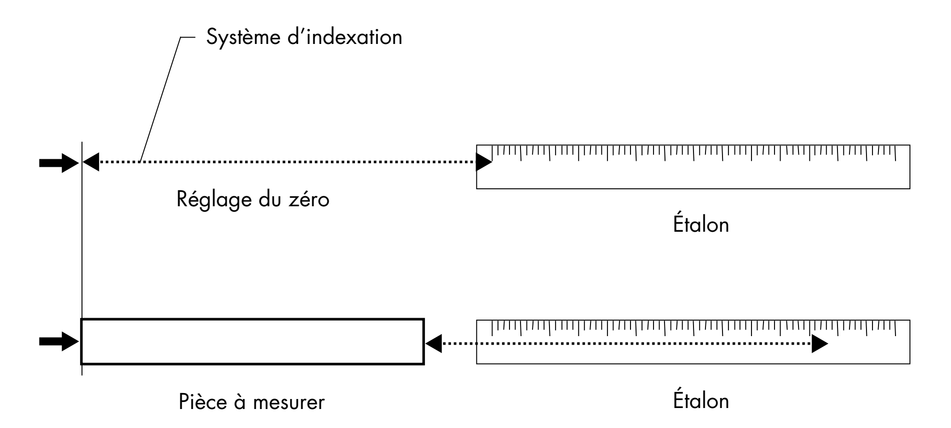
1. Physicien allemand, Ernst Abbe (1840-1905) était professeur et directeur de recherche dans la société Carl Zeiss.

Dans cet appareil, l'étalon embarqué (les graduations) est en parallèle de la pièce à mesurer (mesurande). Il est situé à une distance h qui peut être importante par rapport au mesurande x. Au lieu d'avoir $y = x$, nous obtenons :

$$y = x - h \cdot \tan(\alpha) \approx x - h \cdot \alpha \approx x - h \cdot \frac{J}{L}$$

Note : *pour ce calcul, les angles étant petits, nous n'avons conservé que les infiniment petits du premier ordre (* $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha$ *et* $\cos(\alpha) \approx 1$ *). Cette technique de calcul sera souvent retenue en métrologie dimensionnelle (parfois en passant au deuxième ordre :* $\cos(\alpha) \approx 1 - \alpha^2/2$ *). Remarquons que le défaut angulaire pourrait également être dû au défaut de rectitude de la glissière (non pris en compte dans cet exemple).*

Figure 4.5 : Type d'appareil respectant le principe d'Abbe



Le micromètre est un appareil qui respecte ce principe (fig. 4.5). Ce type de conception engendre des appareils encombrants, ce qui n'est pas toujours possible. Par exemple, sur une machine à mesurer tridimensionnelle type portique, seul l'axe Z respecte ce principe. Les axes X et Y retiennent l'architecture vue pour le pied à coulisse.

Influence des efforts de contact

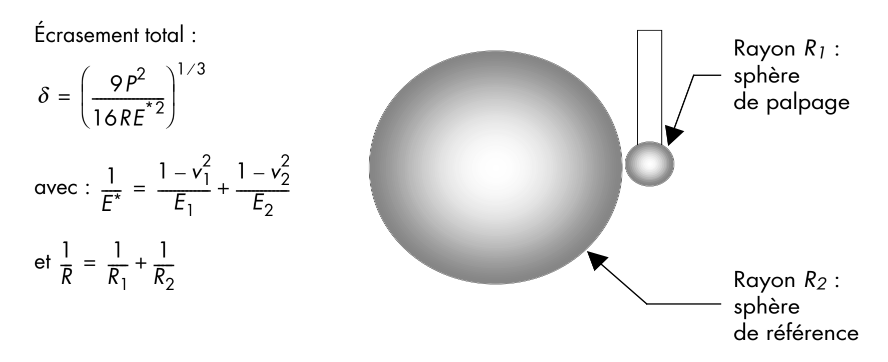
La mesure d'une pièce suppose que celle-ci ne soit soumise à aucune force. Tout effort de contact va engendrer des contraintes générant des déformations globales au sein de la structure de la pièce et du moyen de mesure, et locales par pression de contact. Nous avons vu que dans une chaîne de mesure, une énergie d'activation était nécessaire pour assurer la prise d'information. Cet effort de contact est généré par l'opérateur (cas du pied à coulisse) ou par le moyen de mesure. Parfois, un dispositif sur l'instrument permet simplement de limiter l'effort fourni par l'opérateur (cas du limiteur de couple sur le micromètre).

Pour les déformations de contact entre les solides $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$, elles vont dépendre :

- du type de contact (ponctuel, linéique ou surfacique) ;
- des rayons de courbure des solides en contact (R_1 et R_2) ;
- de la nature des matériaux (module de Young E et coefficient de Poisson υ).

Cet écrasement peut-être modélisé à l'aide des formules de Hertz[1] (fig. 4.6).

Figure 4.6 : Application des formules de Hertz pour un contact ponctuel (sphère/sphère ou sphère/plan)



1. Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), ingénieur et physicien allemand.

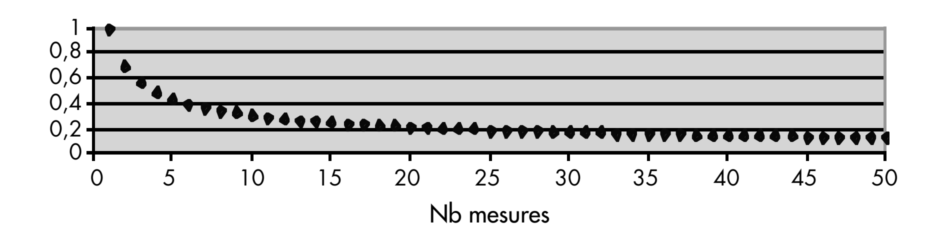
Dans l'exemple précédent avec des billes en céramique (R_1 = 1 mm) et en acier (R_2 = 15 mm), on trouve un écrasement total d'environ 0,3 μm pour une force de contact d'1 N. δ sera le plus souvent négligé ou compensé (notion de rayon dynamique). Cette formule est également valable pour le contact de type sphère plan, il suffit de faire $R_2 = \infty$.

Maîtrise des influences dues à l'appareil de mesure

Le métrologue devra choisir un appareil approprié à son problème (course utile, résolution, pièce déformable ou non, maîtrise de l'effort de contact, etc.). S'il reste une influence non maîtrisable, on pourra :

- estimer le caractère systématique de l'influence et vérifier qu'elle est inférieure à un seuil qui est négligeable par rapport aux autres sources de variation. En particulier, on peut vérifier que l'on reste dans la *classe d'exactitude* spécifiée par un *indice de classe*. Dans le cas contraire, il faut envisager de faire des corrections ;
- réduire les effets aléatoires (par exemple, l'influence d'un jeu) en travaillant à partir de moyenne. L'incertitude est réduite en $\sqrt{n}$.

Figure 4.7 : Diminution de la part aléatoire de l'incertitude en fonction du nombre de mesures



Influence du milieu

Tout mesurage se fait dans un environnement qui va plus ou moins perturber les résultats de mesure. Recenser exhaustivement toutes les grandeurs d'influences dues au milieu est impossible. On demandera simplement au métrologue d'être conscient des principales sources d'influences.

Exemples de grandeurs d'influence dues au milieu

- **La température :** c'est celle qui est le plus souvent citée spontanément. Attention en particulier aux gradients de température qui peuvent être engendrés par l'éclairage et provoquer des déformations non homogènes (marbre par exemple). En micromécanique, son influence reste faible puisque la dilatation est proportionnelle à la longueur de base. Nous l'étudierons plus en détail au chapitre suivant.
- **Les vibrations du sol et des supports (ainsi que les chocs) :** influence difficile à modéliser, on cherchera à l'éliminer par isolation (dalle flottante, support filtrant, suspension pneumatique, etc.).
- **L'hygrométrie :** le taux d'humidité, en dehors de la création néfaste d'oxydation, peut perturber la géométrie de certains composants (les marbres par exemple). Un air trop sec (gênant pour l'opérateur) peut également générer des dysfonctionnements électroniques.
- **Les champs électriques et magnétiques :** les champs magnétiques peuvent être provoqués par l'environnement du processus de production ou plus simplement par le processus lui-même (ablocage, frottement de la meule en rectification). La pièce peut se déformer sous sa propre aimantation résiduelle. Le CETIM[1] montre qu'une opération supplémentaire de désaimantation dans la gamme permet de minimiser le défaut de circularité. On peut noter également comme influence électrique, les variations de tension du réseau d'alimentation.
- **La latitude et l'altitude :** le mesurage des masses est souvent une mesure indirecte, où l'on détermine le poids et ensuite la masse en introduisant la gravité g. La gravité[2] n'est pas une constante mathématique, elle dépend de la situation géographique et de la nature des sols.
- **La pesanteur :** la gravité a également une influence sur la déformation de la machine et de la pièce (par exemple, une pièce longue n'aura pas la même longueur en position horizontale et verticale).

1. Grandadam A., *La Métrologie dimensionnelle en mécanique industrielle*, CETIM, 1977.
2. Lorsque l'on veut prendre en compte son influence, il faut tenir compte principalement de l'altitude et de la latitude (*http://www.ptb.de/en/org/1/11/115/_index.htm*).

Tout objet se déforme sous son propre poids (rappelons que les appareils de métrologie sont souvent massifs). Il sera important de bien situer les appuis pour minimiser les déformations résiduelles (points supports[1] pour les marbres : points de Bessel[2] situés à 0,22 de la longueur ou de la largeur par rapport aux bords).

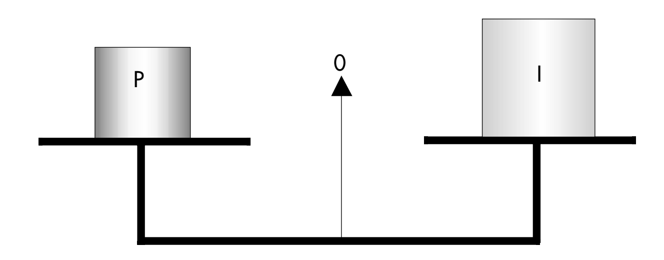
- **La propreté :** à la fois du milieu ambiant (poussière, brouillard d'huile) et de la pièce (trace d'huile par exemple), surtout dans le cas de mesures optiques.
- **Les éclairages latéraux :** par exemple dans le cas de mesure par vision, une baie vitrée située à proximité peut être la source de perturbations (type : coucher de soleil).
- **Le temps :** action à long terme, il provoquera des dérives lentes (par exemple, fluage de certains composants) et à court terme (décharge de condensateurs dans des mesures de rugosités ou de forces, base de temps…). Il est recommandé un temps de stabilisation avant utilisation.
- Etc.

Classer les grandeurs d'influence liées au milieu

Les influences étant nombreuses, on demandera au métrologue d'avoir une démarche de physicien. Cela permettra de réellement retenir les influences prépondérantes pour pouvoir éventuellement faire des corrections. Les autres seront négligées, elles augmenteront le bruit de fond de mesure (incertitude résiduelle). Pour illustrer cette démarche de classement, nous allons l'utiliser lors d'une comparaison de masse entre un étalon de 1 kg en platine (étalon de référence) et un étalon supposé de 1 kg en acier inoxydable (par simplification, les éléments géométriques de la balance seront supposés parfaits) (fig. 4.8).

1. NF E 10-100-1 décembre 2002, Méthodes de mesurage dimensionnel.
2. A. Friedrich Bessel (1784-1846), astronome et mathématicien allemand.

Figure 4.8 : Principe de comparaison de deux étalons de matières différentes



Dans l'exemple précédent on croit comparer deux masses, et dans ce cas avoir : $m_I = m_P$.

En réalité on compare des couples, qui peuvent se ramener à la comparaison de forces avec l'hypothèse de bras de levier identiques. Dans le vide, on peut garder comme forces uniquement les poids, alors que dans l'air il faut en toute rigueur tenir compte de la « poussée d'Archimède ». L'équation devient :

$$m_I \cdot g - V_I \cdot \rho_{Air} \cdot g = m_P \cdot g - V_P \cdot \rho_{Air} \cdot g$$

$$m_I - V_I \cdot \rho_{Air} = m_P - V_P \cdot \rho_{Air} \qquad \text{(indépendant de } g\text{)}$$

$$m_I - \frac{m_I}{\rho_I} \cdot \rho_{Air} = m_P - \frac{m_P}{\rho_P} \cdot \rho_{Air}$$

$$m_I = m_P \cdot \frac{1 - \dfrac{\rho_{Air}}{\rho_P}}{1 - \dfrac{\rho_{Air}}{\rho_I}} = k \cdot m_P$$

Avec les valeurs approximatives suivantes :

- $\rho_P \approx 22\,000$ kg/m^3 (platine à 10 % d'iridium) ;
- $\rho_I \approx 8\,000$ kg/m^3 ;
- $\rho_{Air} \approx 1{,}2$ kg/m^3 (à 20 °C, 50 % d'humidité relative et faible altitude)[1].

k est légèrement inférieur à 1,0001. Ce qui veut dire que l'erreur systématique commise est d'environ 0,1 gramme.

1. Voir le site *www.metgen.org/* pour calculer ρ_{Air} avec plus de précision.

Le plus souvent cette erreur sera négligée. Avec des étalons de masses volumiques voisines ; les poussées d'Archimède sont pratiquement identiques, elles se *compensent*.

Étude de l'influence de la température

Pour cette grandeur particulière, nous allons reprendre les quatre méthodes déjà citées, à savoir :

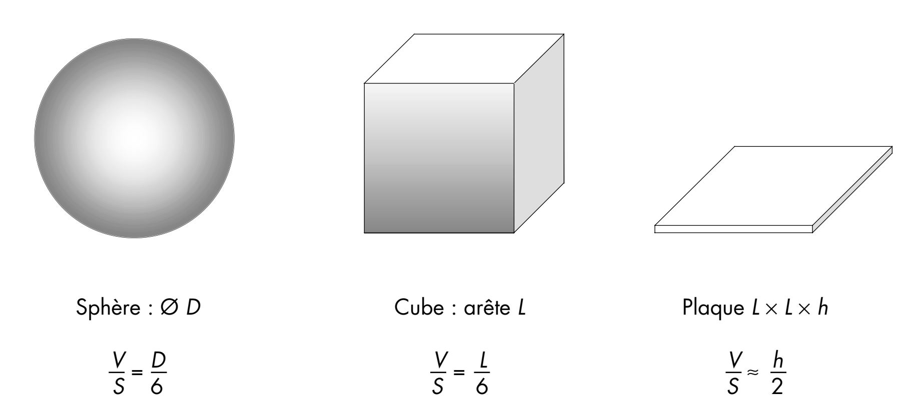
- élimination ;
- insensibilisation ;
- compensation ;
- correction.

Élimination

Rappelons que les longueurs d'un objet sont implicitement définies à la température de 20 °C[1]. Lors de **métrologie fine** (recherche du μm), il est naturel de chercher à faire des mesures à cette température. Cela nécessite d'avoir un local climatisé, avec un sas d'entrée pour éviter les perturbations brusques, de maîtriser les flux d'entrée des personnes (ordre de grandeur : 60 à 80 watts par personne), de choisir un emplacement à l'abri des changements climatiques (par exemple, éviter une face sud avec des baies vitrées), etc. Toutes ces précautions ne suffisent pas. Une pièce venant du lieu de production a probablement une température interne différente. Elle ne passera pas instantanément à la température de 20 °C. Le temps de transition pour atteindre l'équilibre thermique est complexe à modéliser. Empiriquement, on peut constater qu'il sera proportionnel (pour une même matière) au rapport du volume par la surface de l'objet (peau de la pièce). Notons que ce rapport n'est pas sans dimension, il faut travailler dans les mêmes unités pour faire des comparaisons (fig. 4.9).

1. NF E 10-100-1 décembre 2002, Méthodes de mesurage dimensionnel.

Figure 4.9 : Exemple de quelques rapports *V/S*



Pour une même morphologie (par exemple, une pièce cubique), ce rapport est fortement influencé par la taille :

- cube de 1 m d'arête : $\dfrac{V}{S} = \dfrac{1}{6}$;
- cube de 10 mm d'arête : $\dfrac{V}{S} = \dfrac{10^{-2}}{6}$.

Le cube de 10 mm d'arête se refroidira environ cent fois plus vite. Le CETIM[1] donne pour un tampon cylindrique de diamètre 60 mm, un temps de 6 heures pour passer de 25 °C à 20 °C.

Nous verrons qu'il est possible de faire des corrections pour prendre en compte une température différente de 20 °C. Ces corrections ne seront efficaces que si toute la matière de la pièce est à la même température. En cas de gradient de température à l'intérieur de la pièce, cela va engendrer des déformations, particulièrement dans le cas d'architecture complexe (par exemple des nervures, rayons, etc.).

Insensibilisation

L'idée est de retenir des matériaux peu sensibles aux variations de températures. Cette aptitude est quantifiée par un indicateur appelé « coefficient de dilatation » exprimé en K^{-1} (tableau 4.1).

1. Grandadam A., *La Métrologie dimensionnelle en mécanique industrielle*, CETIM, 1977.

Tableau 4.1 : Exemples de coefficients de dilatation

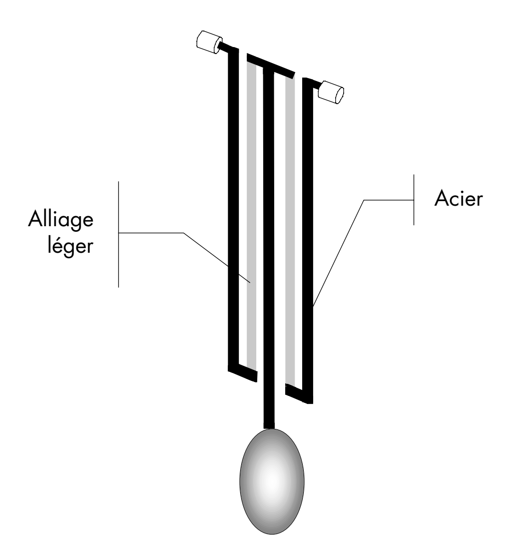
Matériaux	Coefficient (10^{-6}/K)
Vitro-céramique	0.02
Invar	0,6 à 1,2
Céramiques $Al2O3$	7
Céramiques SiC	4
Céramiques $Si3N4$	3.5
Céramiques $ZrO2$	2,3 à 3,2
Carbure de tungstène	4,5 à 7
Diabase	5
Verres	6 à 9
Granit	7,5 à 8
Alliages titanes	8,5 à 9,5
Aciers	11,5
Inox ferritiques & martensitiques	10.5
Inox austénitiques	15 à 16
Fontes grises	10 à 11
Fontes grises GS	12,5
Fontes blanches	20
Bronzes	17,5 à 19
Laitons	18(CuZn5) à 21(CuZn40)
Alliages légers 5356	22,5
Alliages légers 2017A	24
Alliages de Zinc	26
Magnésium	26

L'insensibilisation du moyen de mesure à la température ne sera intéressante que si tous les composants de l'acte de mesurage sont également concernés. Par exemple, si l'on compare une pièce en acier ($\lambda_{Acier} = 11{,}5 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$) avec une cale-étalon céramique en ZrO2 ($\lambda_{Céramique} = 2{,}8 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$) à une température différente de 20 °C, la différence de dilatation sera perturbatrice.

Compensation

La méthode par compensation ne cherche pas à annuler l'influence de la température (dilatation), mais à essayer de contourner ses différents effets (au niveau de chaque composant), de manière à ce que le résultat global ne soit pas perturbé. Citons, par exemple, le problème historique de mesure de la longitude. John Harrison[1] pour améliorer la qualité de son horloge marine chercha à compenser l'influence de la température sur la période du pendule (maîtrise de la longueur) en combinant judicieusement des matériaux de coefficients de dilatation très différents (1725) (fig. 4.10).

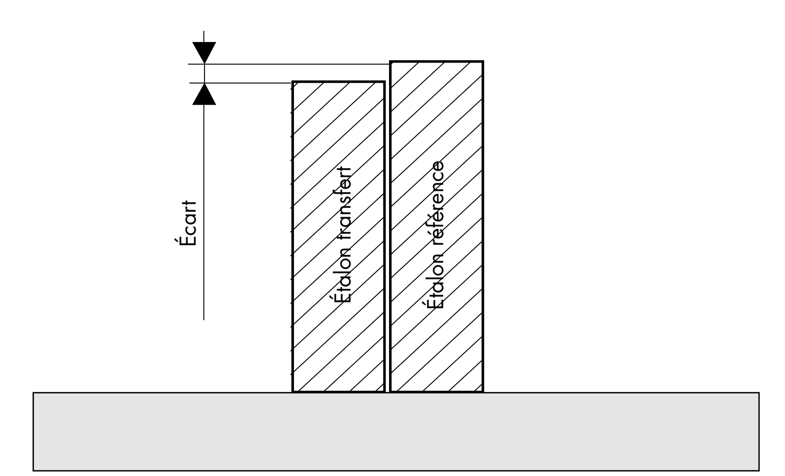
Figure 4.10 : Principe de la compensation de longueur sur un balancier



Lors de la mesure de cales de haute qualité, on emploie souvent une méthode par comparaison en utilisant des cales de références de même matière que les cales à vérifier (fig. 4.11).

1. John Harrison (1693-1776), modeste horloger/menuisier, eut beaucoup de mal à faire reconnaître à la communauté scientifique anglaise le bien-fondé de son approche de la mesure de la longitude grâce à une horloge de haute précision. Ses différentes inventions firent progresser l'horlogerie et eurent un impact financier important sur la fiabilité du trafic maritime en permettant d'éviter de nombreux naufrages.

Figure 4.11 : Comparaison de cales de même matériau



Correction

Faire une correction suppose que l'on est capable de prévoir les conséquences de la grandeur d'influence. Dans le cas d'une influence variable, non prévisible *a priori* comme pour la température, seule la correction de type modélisation du phénomène est envisageable.

Pour des pièces métalliques (dilatation thermique isotrope), l'allongement peut être modélisé par une fonction linéaire sous réserve qu'il n'y ait pas de changement de phase (par exemple, passer d'une structure « cubique centrée » à « cubique à face centrée ») :

$$L_\theta = L_{20°} \cdot \left[1 + \lambda_{Matière} \cdot (\theta - 20°)\right]$$

À partir de la mesure faite à la température θ, on peut en déduire la longueur de la pièce à 20 °C (la mesure pouvant être faite également en kelvins puisqu'il s'agit d'une différence de température) :

$$L_{20°} = L_\theta - L_{20°} \cdot \lambda_{Matière} \cdot (\theta - 20°)$$

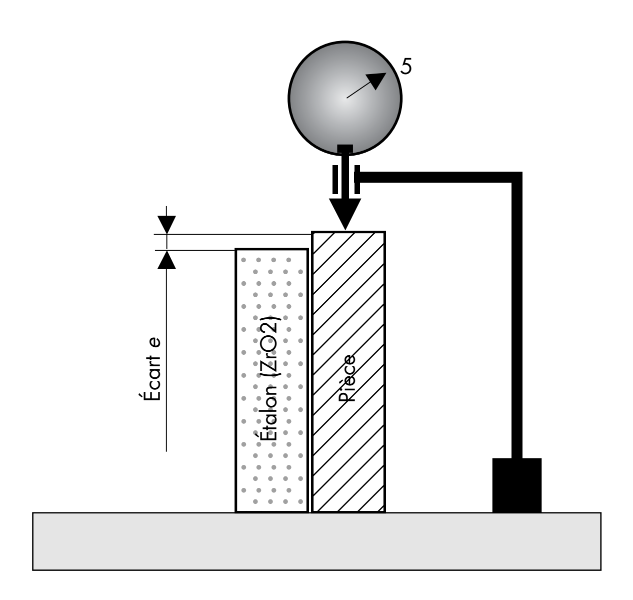
$$L_{20°} = L_\theta - C_{\theta \to 20°}$$

$$\text{avec : } C_{\theta \to 20°} = L_{20°} \cdot \lambda_{Matière} \cdot (\theta - 20°) \approx L_\theta \cdot \lambda_{Matière} \cdot (\theta - 20°)$$

Exemple de correction de température

Nous comparons dans un atelier à la température de 26 °C, une pièce en acier avec une cale-étalon en céramique ($ZrO2$) de valeur 75,000 mm. L'écart *e* donné par le comparateur est de + 5 μm. Quelle est la longueur de la pièce à 20 °C (fig. 4.12) ?


Figure 4.12 : Exemple d'illustration de correction de température



Retenons les valeurs de coefficients de dilatation suivants :

$\lambda_{Pièce} = 11,5 \cdot 10^{-6}\, K^{-1}$ et $\lambda_{Étalon} = 2,8 \cdot 10^{-6}\, K^{-1}$

Si la pièce et l'étalon sont dans l'atelier depuis suffisamment longtemps, on peut considérer qu'ils sont à la même température θ :

$$L_{P,\theta} = L_{E,\theta} + e$$

soit :

$$L_{P,20°} \cdot \left[1 + \lambda_P \cdot (\theta - 20°)\right] = L_{E,20°} \cdot \left[1 + \lambda_E \cdot (\theta - 20°)\right] + e$$

Rappelons que, par définition, la valeur gravée sur la cale correspond à $L_{E,20°}$

$$L_{P,20°} = \frac{L_{E,20°} \cdot \left[1 + \lambda_E \cdot (\theta - 20°)\right] + e}{\left[1 + \lambda_P \cdot (\theta - 20°)\right]}$$

soit la valeur approchée :

$$L_{P,20°} \approx L_{E,20°} \cdot \frac{\left[1+\lambda_E \cdot \left(\theta - 20°\right)\right]}{\left[1+\lambda_P \cdot \left(\theta - 20°\right)\right]} + e$$

Valeur numérique :

- sans correction : $L_{P,20°} = 75{,}005mm$;
- avec correction : $L_{P,20°} = 75{,}001mm$.

Remarques :

• Le lecteur peut remarquer que lorsque l'étalon et la pièce ont le même coefficient de dilatation, la correction est inutile.

• La valeur corrigée n'est qu'une estimation de la valeur vraie, l'intervalle de confiance associé à cette valeur (incertitudes) dépend de nombreux paramètres (en particulier des coefficients λ_i qui ne sont pas connus exactement). Nous reviendrons dans le chapitre 8 sur ce point.

Chapitre 5

Maîtriser l'influence du posage

Par idéal, lors de métrologie dimensionnelle, le posage de la pièce ne devrait pas avoir d'influence perturbatrice. Pourtant bien souvent, il y a un risque important d'imputer à la mesure d'une caractéristique de la pièce un complément d'écart provenant en réalité d'un mauvais posage.

Comme pour les autres grandeurs d'influence, nous chercherons à intervenir par :

- **élimination :** plus modestement, nous chercherons à garantir un posage de qualité garantissant si possible l'unicité dans le temps des différentes mises en position ;
- **insensibilisation :** retenir un processus de mesure qui soit insensible aux variations de posage ;
- **compensation :** combiner des signaux de mesure corrélés pour s'affranchir des erreurs de mise en position ;
- **correction :** nous essayerons de modéliser l'erreur de mise en position (à partir de données initiales) de manière à pouvoir faire une correction pour éliminer l'influence des variations de posage.

Ces différentes méthodes seront illustrées à l'aide d'exemples empruntés à la production mécanique. La lecture de ce chapitre n'est pas indispensable pour la suite de l'ouvrage.

Élimination : améliorer l'isostatisme du montage de contrôle

Si l'on prend une pièce et qu'on la monte plusieurs fois de suite sur le montage de contrôle, il faut que la pièce soit toujours positionnée de la même manière (en translation et en orientation). Si ce n'est pas le cas, cela peut provenir principalement :

- de la déformation de la pièce ;
- du frottement qui interrompt le glissement pour venir en appui ;

- du système d'ablocage engendrant des efforts qui vont faire bouger la pièce lors du serrage ;
- et du choix « judicieux » des surfaces (ou points) d'appui réalisant l'interface « pièce-montage ». Plus particulièrement, le nombre de points d'appui ne doit pas être surabondant.

Notions de degrés de liberté

Un solide dans l'espace (non contraint) peut se déplacer en translation (trois composantes de déplacement) et en rotation (trois composantes angulaires). On dira qu'il a *six degrés de liberté*.

Dans notre cas particulier, il s'agit de caractériser un ensemble de positions dans un voisinage d'une position initiale cible. Comme il s'agit de micro-déplacements, la transformation géométrique permettant de passer de la position cible à la position réelle (ou réciproquement) peut être modélisée par un torseur (linéarisation) appelé « torseur de petits déplacements[1] » (les composantes sont considérées comme des infiniment petits du premier ordre) :

$$\left\{\mathscr{D}\right\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \\ \overrightarrow{D_O} \end{matrix}\right. = {}_{O}\left\{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ u_O \\ v_O \\ w_0 \end{matrix}\right.$$

Mesurer la position, revient à connaître les six grandeurs scalaires correspondantes. Remarquons que le déplacement (en mm) est modélisé par un champ de moments, le lieu où il est exprimé doit être clairement indiqué :

$$\overrightarrow{D_{P_i}} = \overrightarrow{D_O} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{OP_i}$$

1. Bourdet P. et Clément A., « Controlling a Complex Surface with a 3 Axis Measuring Machine », *Annals of CIRP*, vol. 25/1/1976, p. 354-361.

ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_{P_i} \\ v_{P_i} \\ w_{P_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_{P_i} \\ y_{P_i} \\ z_{P_i} \end{bmatrix}$$

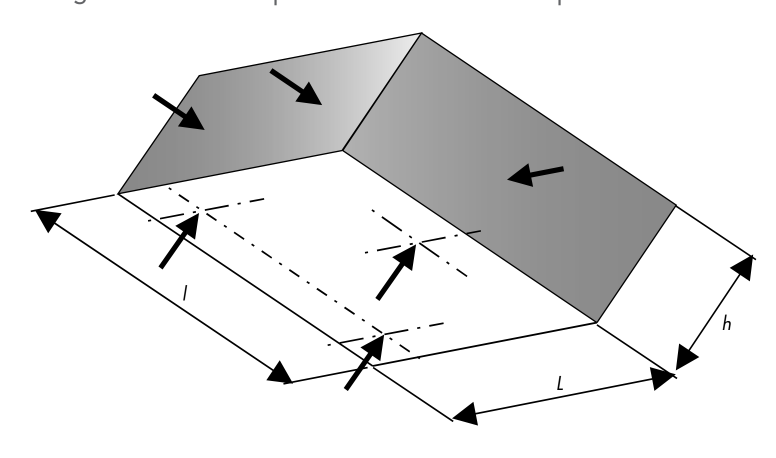
La qualité d'un posage de contrôle sera caractérisée par la mesure de ces six grandeurs scalaires. Cette mesure « multicritères » va être fortement influencée par le choix des points d'appui réalisant « l'interface » entre la pièce et le montage de contrôle.

Optimisation de la position des points d'appui

L'objectif est de créer une liaison mécanique complète entre la pièce et le montage de contrôle. Le plus souvent, celle-ci sera réellement réalisée par six « petites surfaces de contact » matérialisant les six contacts ponctuels. Dans le cas de surfaces de contact différentes (plan sur plan, par exemple), on pourra toujours imaginer le nombre de liaisons ponctuelles équivalentes (exemple, trois points pour un appui plan).

Exemple : mise en position de Lord Kelvin[1] (fig. 5.1)

Figure 5.1 : Mise en position de Lord Kelvin et points de Bessel



1. William Thomson (1824-1907), physicien britannique mieux connu en tant que Lord Kelvin.

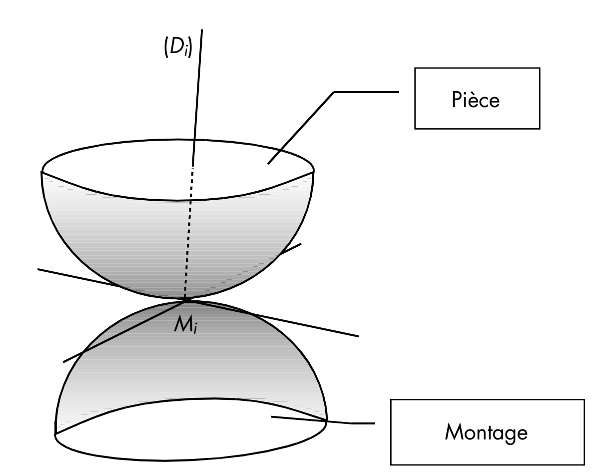
Ce modèle de mise en position (connu également sous l'appellation : plan-trait-point) est très répandu. Nous l'utiliserons comme exemple conducteur. Si le choix paraît relativement évident (bien que l'appui plan puisse être construit différemment), il n'en est pas toujours de même lors de pièces à la morphologie tourmentée (pièces de forge ou de fonderie par exemple).

> ***Note :*** *nous posons comme hypothèse que la pièce se comporte comme un solide indéformable. Dans le cas contraire, la disposition des points cherchera à lutter contre l'influence de la gravité (déformations). Par exemple on pourra retenir les points de Bessel*[1] *pour minimiser la déformation due à l'action de la gravité (cas des marbres notamment).*

Coordonnées plückériennes d'une droite

Partant d'un point de contact entre la pièce et le montage et après avoir défini le plan tangent nous pouvons construire la droite normale à ce plan et passant par le point de contact (fig. 5.2).

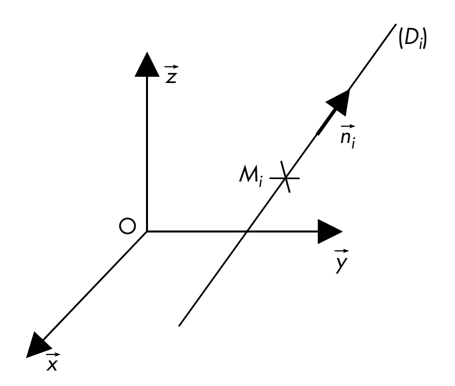
Figure 5.2 : Droite normale (D_i) au point de contact M_i



1. Les points de Bessel sont retenus pour minimiser les déformations de la longueur à mesurer en positionnant les appuis par rapport aux bords à respectivement 0,22.L et 0,22.l (NF E 10-100-1).

Si nous associons un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ à l'ensemble « machine-montage de contrôle », nous pouvons définir chaque droite normale par ses coordonnées plückériennes[1].

Figure 5.3 : Position spatiale de la droite (D_i) dans le repère R



$\overrightarrow{n_i}$ est un vecteur unitaire de (D_i). Partant des coordonnées de :

$$\overrightarrow{n_i}\left|\begin{matrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \end{matrix}\right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_i}\left|\begin{matrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{matrix}\right.$$

on calcule le produit vectoriel : $\overrightarrow{g_O} = \overrightarrow{OMi} \wedge \overrightarrow{n_i}$.

Les coordonnées plückériennes sont définies par les six grandeurs (composantes) scalaires suivantes :

$$\left\{\mathcal{P}_i\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{n_i} \\ \\ \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{n_i} \end{matrix}\right._O = \left\{\begin{matrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \\ y_i.n_{zi} - z_i.n_{yi} \\ z_i.n_{xi} - x_i.n_{zi} \\ x_i.n_{yi} - y_i.n_{xi} \end{matrix}\right._O$$

1. Julius Plücker (1801-1868), mathématicien et physicien allemand.

Ces six composantes ne sont pas indépendantes, elles sont liées par :

$$n_{xi}^2 + n_{yi}^2 + n_{zi}^2 = 1$$

$$\overrightarrow{n_i} \bullet \overrightarrow{g_0} = 0$$

$$n_{xi} \cdot \left(y_i.n_{zi} - z_i.n_{yi}\right) + n_{yi} \cdot \left(z_i.n_{xi} - x_i.n_{zi}\right) + n_{zi} \cdot \left(x_i.n_{yi} - y_i.n_{xi}\right) = 0$$

> ***Note :*** *le point Mi peut être pris n'importe où sur la droite (propriété d'équiprojectivité).*

Rang d'un système de droite

Les six droites normales (D_1) à (D_6) constituent un système de droites. On appelle *rang* du système, l'ordre le plus grand des déterminants non nuls que l'on peut extraire de la matrice construite à partir des coordonnées plückériennes des droites appartenant au système.

$$r = \begin{vmatrix} n_{x1} & n_{x2} & n_{x3} & n_{x4} & n_{x5} & n_{x6} \\ n_{y1} & n_{y2} & n_{y3} & n_{y4} & n_{y5} & n_{y6} \\ n_{z1} & n_{z2} & n_{z3} & n_{z4} & n_{z5} & n_{z6} \\ y_1.n_{z1} - z_1.n_{y1} & g_{O,x2} & g_{O,x3} & g_{O,x4} & g_{O,x5} & y_6.n_{z6} - z_6.n_{y6} \\ z_1.n_{x1} - x_1.n_{z1} & g_{O,y2} & g_{O,y3} & g_{O,y4} & g_{O,y5} & z_6.n_{x6} - x_6.n_{z6} \\ x_1.n_{y1} - y_1.n_{x1} & g_{O,z2} & g_{O,z3} & g_{O,z4} & g_{O,z5} & x_6.n_{y6} - y_6.n_{x6} \end{vmatrix}$$

> ***Remarque :*** *le rang d'un système est au maximum de 6.*

Théorème de Hunt

Théorème : soit r le rang du système S des droites de contact (normales), les degrés de liberté restant entre les deux solides sont au nombre de $d = 6 - r$.

Application : dans ce cas, nous cherchons à immobiliser (sans surcontraindre) la pièce par rapport au montage. L'objectif est donc d'obtenir $r = 6$.

Optimisation de la localisation des points d'appui

Nous ne rappellerons pas les règles de bon sens pour positionner judicieusement les six points d'appui (par exemple, éviter trois points alignés). L'optimisation est multi-objectifs. Il faut minimiser simultanément six sorties (trois translations et trois rotations) en choisissant six points d'appui (les normales associées dépendent des interfaces « pièce-montage »). Nous proposons de remplacer l'optimisation multi-objectifs par un indicateur mono-objectif simple à calculer. Nous chercherons à maximiser le déterminant extrait de la matrice des coordonnées plückériennes.

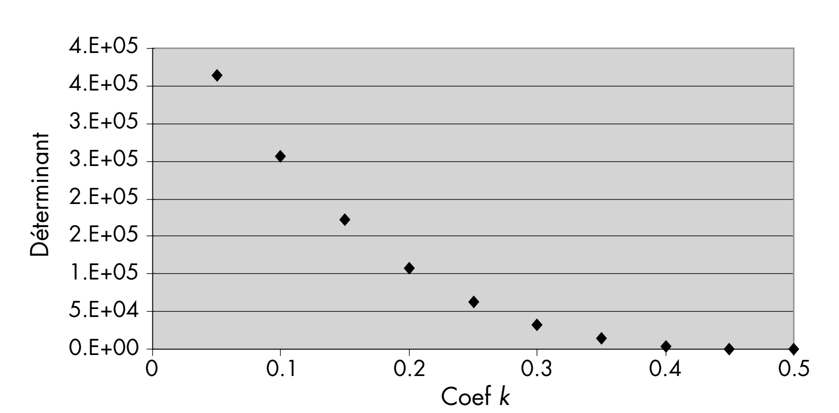
Exemple

Reprenons le cas précédent en observant l'influence du coefficient *k* (pour les points 1 à 5 de la figure 5.4) sur le déterminant de la matrice construite avec les coordonnées plückériennes (rappel : points de Bessel pour $k = 0,22$).

Figure 5.4 : Influence du coefficient *k* sur le déterminant des six normales

Les points d'appuis latéraux étant à mi-hauteur, cela donne en fonction de k pour $L = 100$ mm ; $l = 50$ mm ; $h = 20$ mm :

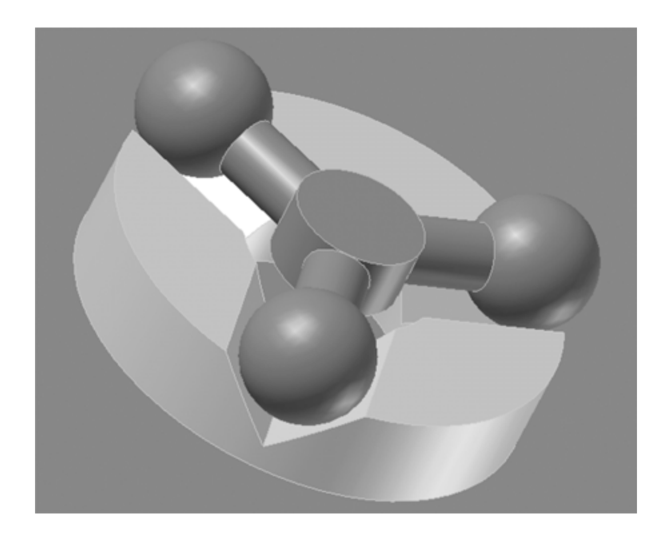
Figure 5.5 : Le déterminant comme indicateur de qualité du montage



On remarque que pour $k = 0,5$ nous n'avons que trois appuis efficaces, ce qui revient à une liaison rotule (trois degrés de liberté).

Cette technique[1] permet de comparer différentes solutions, sous réserve d'un encombrement voisin (voir figure 5.6 pour la liaison de Boys qui donne de meilleurs résultats).

Figure 5.6 : Exemple d'une liaison de Boys



1. La mesure globale de position fournie est fortement bruitée par le couple matière « pièce-montage » (déformations locales, frottement) et par le système d'ablocage. Cette proposition de mesure globale est en cours de test (laboratoire SYMME).

Il est également possible de définir une mesure de la qualité de la liaison en utilisant une norme de la matrice des coordonnées plückériennes (P. Bourdet et A. Clément). Les normes matricielles associées à la matrice n'étant pas toujours aisées à calculer, on retiendra la pseudo-norme euclidienne :

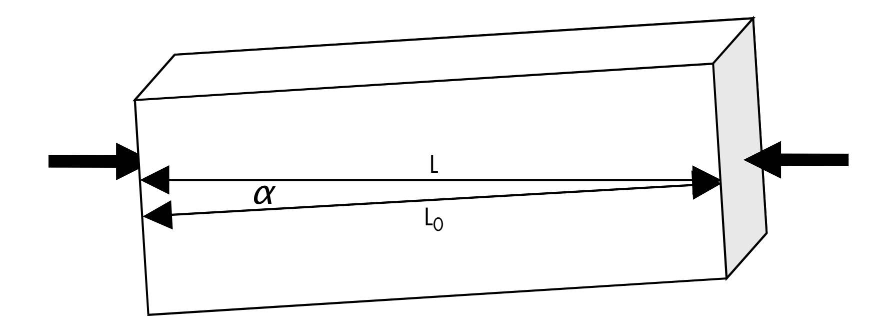
$$\| \ \|_1 \leq \| \ \|_E \leq \| \ \|_2 \qquad \text{avec} \qquad \|P\|_E = \sqrt{\sum_i \sum_j p_{ij}^2}$$

Les éléments de cette matrice n'étant pas homogènes, on ne peut qu'optimiser un montage dont le type est déjà retenu.

Insensibilisation

Le processus de contrôle est tel que pour une position quelconque (en restant dans un voisinage acceptable), il donne la même valeur de sortie. Pour illustrer ce concept, nous retiendrons la mesure d'une pièce type « cale » par mesure différentielle avec une cale-étalon.

Figure 5.7 : Exemple de mesure sans dégauchissage



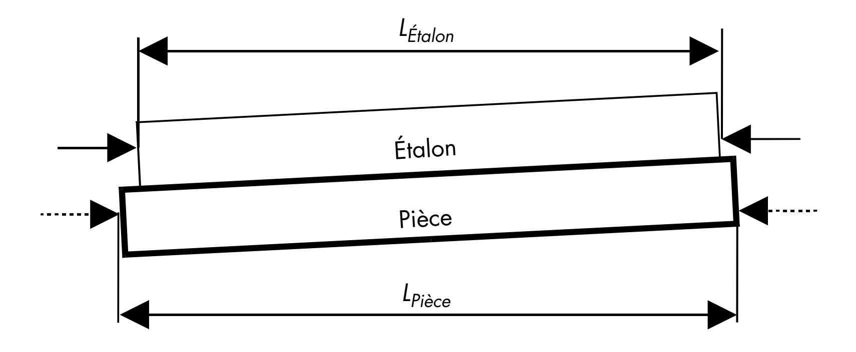
Si l'on ne prend pas garde au dégauchissage de la pièce (orientation de la pièce sur la machine suivant deux axes), le résultat sera erroné (fig. 5.7). Par exemple pour une pièce de 75,000 mm, inclinée de α = 2°, la mesure donnera :

$$L = \frac{L_0}{\cos\alpha} = 75,048 \text{ mm}$$

Pour annuler cet effet, on envisage une mesure par comparaison, en utilisant la procédure suivante (fig. 5.8) :

- mettre la pièce et la cale-étalon côte à côte (placage) ;
- poser l'ensemble sur la machine ;
- faire le zéro sur la cale-étalon ;
- déplacer l'ensemble à l'aide du chariot transversal ;
- mesurer l'écart entre la pièce et la cale-étalon.

Figure 5.8 : Exemple de posage avec défaut d'orientation (vue de dessus)



La longueur observée de l'étalon ne correspond pas à la valeur certifiée :

$$L_{pièceObs} = L_{EtalonObs} + e$$

$$\frac{L_{pièceVraie}}{\cos\alpha} = \frac{L_{EtalonVraie}}{\cos\alpha} + e$$

$$L_{pièceVraie} = L_{EtalonVraie} + e \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

Si α est petit, le processus de mesure est pratiquement insensible à la perturbation d'orientation.

Compensation

L'objectif est de trouver une technologie de montage où les sorties locales (mesures) vont pouvoir se compenser. Intuitivement, c'est ce que nous pouvons vérifier sur la figure 5.9 pour la mesure d'un diamètre avec deux jauges inductives A et B (type stop cote).

Figure 5.9 : Somme algébrique des sorties des capteurs inductifs

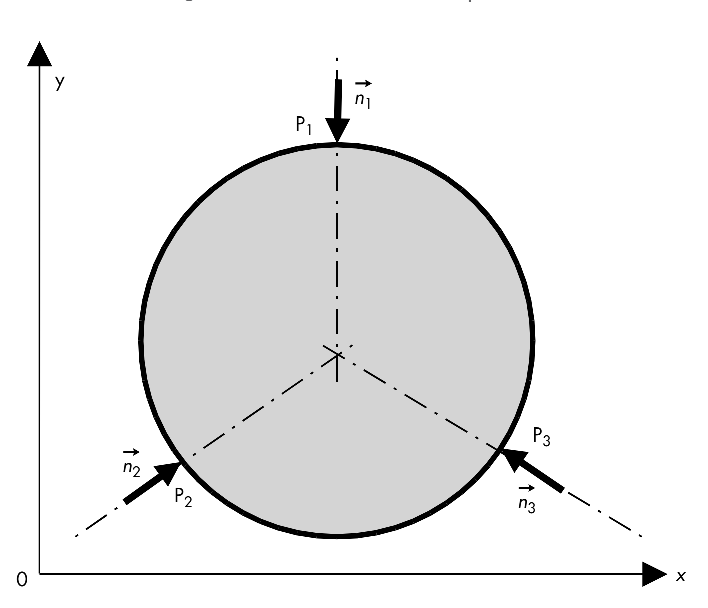
Il est possible d'obtenir le même résultat avec un seul comparateur monté sur un cé flottant.

Étude de l'incidence du déplacement de l'étalon dans la mesure d'un rayon (exemple avec trois capteurs)

Présentation

On veut mesurer le rayon d'un cercle à l'aide de trois capteurs linéaires inductifs placés à 120 degrés (mouvement plan sur plan, points de palpage P_i), avec ξ_i la sortie du capteur n° i.

Figure 5.10 : Position des capteurs



Imaginons l'étalon bien « centré », nous avons alors $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Si nous déplaçons l'étalon, pour ne pas perturber le résultat, nous devrions avoir : $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$

Position d'un capteur

Chaque capteur est positionné par un point de palpage P_i : $P_i \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{vmatrix}$

et orienté par une normale $\vec{n_i} \begin{vmatrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ 0 \end{vmatrix}$

La droite support du capteur peut être représentée par ses coordonnées plückériennes :

$$\left\{\mathcal{P}_i\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix} \vec{n_i} \\ \\ \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{n_i} \end{matrix}\right. = {}_O\left\{\begin{matrix} n_{xi} \\ n_{yi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_i.n_{yi} - y_i.n_{xi} \end{matrix}\right.$$

Ces coordonnées sont liées par : $\left\|\overrightarrow{n_i}\right\| = 1$, soit : $n_{xi}^2 + n_{yi}^2 = 1$.

Caractérisation du déplacement de solide

Le déplacement du solide étant petit, il sera défini par un torseur de petits déplacements (linéarisation) :

$$\{\mathcal{D}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \\ \overrightarrow{D_O} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ u_O \\ v_O \\ 0 \end{Bmatrix}_O$$

Mesurer le déplacement revient à connaître les trois grandeurs scalaires u_0, v_0 et γ.

Mesure locale au niveau d'un capteur

Le capteur mesure la projection (ξ_i) du déplacement du point P_i sur la normale $\overrightarrow{n_i}$ (au premier ordre) : $\xi_i = \overrightarrow{D_{P_i}} \bullet \overrightarrow{n_i}$

soit :

$$\xi_i = \left(\overrightarrow{D_O} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{OP_i}\right) \bullet \overrightarrow{n_i}$$

$$\xi_i = (\overrightarrow{D_O} \bullet \overrightarrow{n_i}) + (\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \bullet \overrightarrow{OP_i} \wedge \overrightarrow{n_i})$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{D_{Pith}} \bullet \overrightarrow{n_i}$ peut se représenter comme le comoment de deux torseurs, le torseur de petits déplacements déjà étudié $\{\mathcal{D}\}$ et le torseur représentant les coordonnées plückériennes $\{\mathcal{P}\}$ (ce point sera généralisé au paragraphe traitant l'approche avec correction p. 97 et suiv.).

$$\xi_i = \{\mathcal{D}\} * \{\mathcal{P}\}$$

$$\xi_i = \left(u_O.n_{xi} + v_O.n_{yi} + \gamma.(x_i.n_{yi} - y_i.n_{xi})\right)$$

Incidence du déplacement $\{\mathscr{D}\}$ sur les capteurs

On obtient un lien entre les trois composantes u_0, v_0 et γ et les sorties capteurs ξ_1, ξ_2 et ξ_3 en résolvant le système :

$$\begin{bmatrix} n_{x1} & n_{y1} & x_1 n_{y1} - y_1 n_{x1} \\ n_{x2} & n_{y2} & x_2 n_{y2} - y_2 n_{x2} \\ n_{x3} & n_{y3} & x_3 n_{y3} - y_3 n_{x3} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

Exemple

En reprenant la configuration de la figure 5.8, posons :

$$\vec{n_1}\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \vec{n_2}\begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{vmatrix} \qquad \vec{n_3}\begin{vmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$$

Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & (-x_1) \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & \left(1/2 \cdot x_2 - \sqrt{3}/2 \cdot y_2\right) \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & \left(1/2 \cdot x_3 + \sqrt{3}/2 \cdot y_3\right) \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

Résolution avec choix de l'origine au centre du cercle

$$\overrightarrow{OP_1}\begin{vmatrix} 0 \\ R \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{OP_2}\begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}R \\ -\dfrac{1}{2}R \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{OP_3}\begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \\ -\dfrac{1}{2}R \end{vmatrix}$$

À partir des différentes valeurs ξ_i, nous obtenons le système suivant :

$$0 \bullet u_0 - 1 \bullet v_0 + 0 \bullet \gamma = \xi_1$$
$$\sqrt{3}/_2 \bullet u_0 + 1/_2 \bullet v_0 + \left(-\sqrt{3}/_4 \cdot R + \sqrt{3}/_4 \cdot R \right) \bullet \gamma = \xi_2$$
$$-\sqrt{3}/_2 \bullet u_0 + 1/_2 \bullet v_0 + \left(+\sqrt{3}/_4 \cdot R - \sqrt{3}/_4 \cdot R \right) \bullet \gamma = \xi_3$$

Nous pouvons calculer $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ en fonction de u_0, v_0 et γ. Nous avons bien :

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

Conclusion : le système est insensible à la position de l'étalon (sous l'hypothèse de petits déplacements).

Correction

Nous avons montré que pour la température, il était possible de faire une mesure à une température quelconque et ensuite prédire, grâce à une modélisation adéquate, ce qu'il en était réellement à 20 °C. Pour cela, il était nécessaire de connaître l'écart de température. Nous retrouverons ici la même démarche. L'objectif est d'identifier l'erreur de posage et ensuite d'être capable, par logiciel (déplacement virtuel) ou par déplacement physique (table motorisée par exemple), de corriger cette influence perturbatrice.

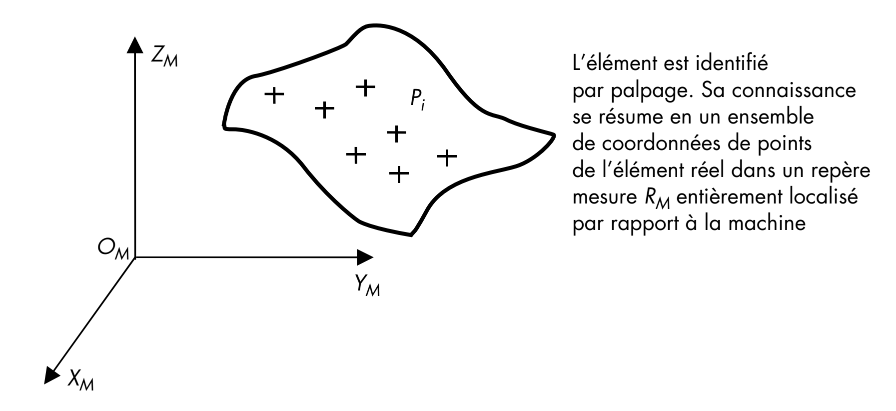
Il existe plusieurs approches pour proposer des corrections. Ce type d'étude pouvant donner lieu à un ouvrage complet, nous nous limiterons :

- à l'association d'un élément géométrique à un nuage de points (méthode d'identification d'un élément optimisé) ;
- à l'analyse modale d'une surface (mise en évidence des défauts de position et de forme).

Association d'un élément géométrique à un ensemble de points

Identification de l'élément réalisé (fig. 5.11)

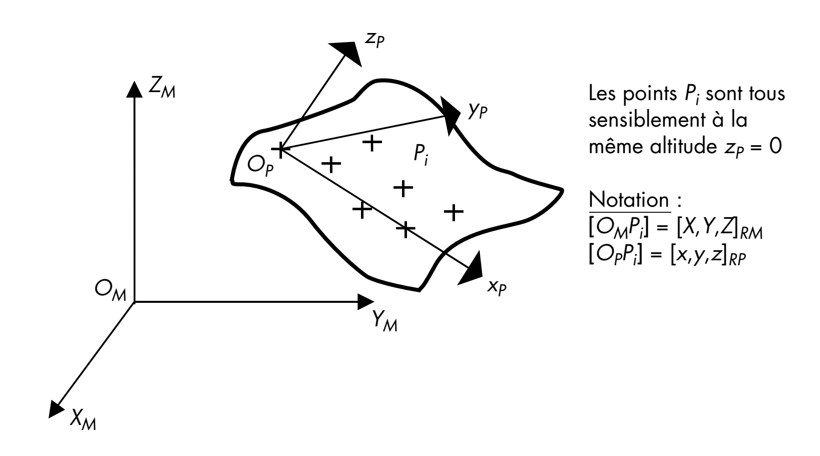
Figure 5.11 : Palpage des points dans le repère machine



Création d'un repère local de dégauchissage (balançage)

Ce repère peut être construit soit physiquement en étant lié à la pièce, à l'aide d'un nombre de points minimum (choisis en fonction du type de surface), soit géométriquement en s'appuyant sur la définition nominale de la pièce (modèle CAO). Par exemple, pour la première solution, dans le cas du plan, le choix de trois points, judicieusement choisis, sera suffisant pour définir ce repère local de calcul $R_P(O_P, x_P, y_P, z_P)$.

Figure 5.12 : Définition d'un repère brut de dégauchissage



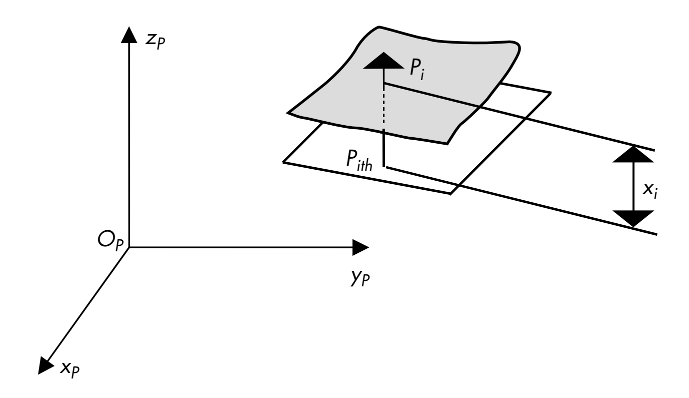
Remarquons que :

- le choix des axes va permettre de définir un sens d'accostage lors du palpage d'un point. Par exemple si la surface réalisée est du type plan, l'axe z_P correspond à la direction de palpage ;
- pour définir le repère R_P nous avons retenu trois points *assez éloignés*. Ces trois points sont par définition d'altitude $z_P = 0$. D'autres techniques pourraient être retenues.

Mesure de l'élément réel

En chaque point, nous allons mesurer (par calcul) la différence constatée entre la surface réelle (contact physique) et la surface nominale. Cette surface nominale est supposée reconstruite géométriquement dans le repère R_P. L'écart mesuré au point P_i sera nommé ξ_i (fig. 5.13).

Figure 5.13 : Position de l'élément réel par rapport à l'élément nominal



Nous avons ainsi un ensemble de mesures $\{\xi_i\}$ qui caractérise la surface réelle.

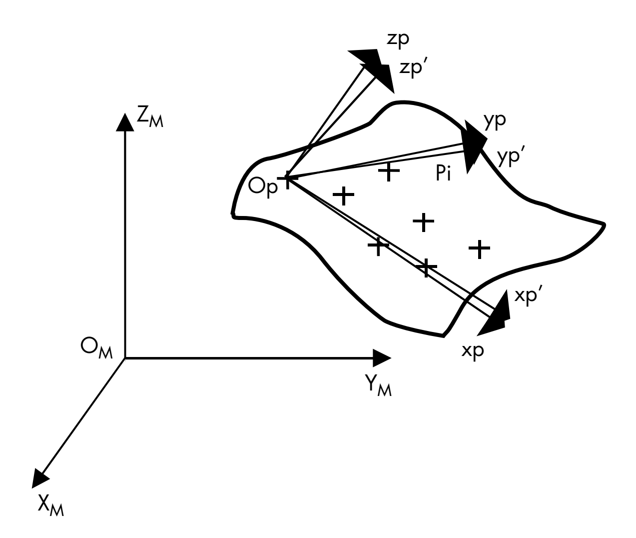
> **Exemple**
>
> Dans le cas d'une planéité, le plan reconstruit correspond au plan (O_P, $\mathbf{x_P}$, $\mathbf{y_P}$). Le défaut de planéité brut est égal à :
>
> $\Delta Planéité = Sup(\xi_i) - Inf(\xi_i)$

Optimisation du dégauchissage

Pour la définition du repère R_P les trois points choisis ne conduisent pas forcément à la meilleure association, il reste une part d'arbitraire. Un autre choix aurait conduit à un repère $R_{P'}$ voisin de R_P.



Figure 5.14 : Choix du repère de dégauchissage



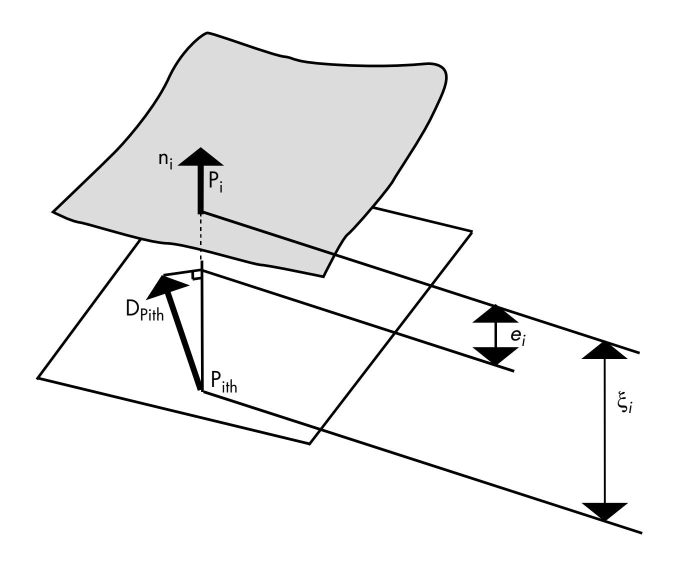
En utilisant la même technique de mesure, nous obtiendrions l'ensemble de valeurs (mesures) $\{\xi'_i\}$. La technique proposée par Bourdet et Clément[1] consiste à représenter la transformation géométrique de passage du repère R_P à R_P'de manière simple à l'aide d'un torseur (linéarisation) appelé **torseur de petits déplacements**. (Les composantes sont considérées comme des infiniment petits du premier ordre.)

$$\{\mathcal{D}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \\ \overrightarrow{D_{O_P}} \end{matrix} \right._{O_P} = \left\{ \begin{matrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{matrix} \right._{O_P}$$

1. Bourdet P. et Clément A., « Controlling a Complex Surface with a 3 Axis Measuring Machine », *Annals of CIRP*, vol. 25/1/1976, p. 354-361.

Imaginons qu'après avoir fait la mesure, où pour le point P_i nous avons mesuré la valeur ξ_i, nous recommencions la mesure avec un nouveau repère de dégauchissage (fig. 5.15).

Figure 5.15 : Déplacement de l'élément nominal



Le plan contenant P_{ith} s'est déplacé. Le déplacement local est représenté par le vecteur $\mathbf{D_{Pith}}$, la nouvelle mesure vaut e_i. (En toute rigueur, la mesure ne s'est plus faite suivant $\boldsymbol{n_i}$ mais suivant $\boldsymbol{n_i}$', l'erreur commise est du second ordre.)

L'ensemble de mesures $\{\xi_i\}$ est remplacé, suite au léger déplacement, par l'ensemble $\{e_i\}$ où chaque valeur e_i est estimée par :

$$e_i = \xi_i - \overrightarrow{D_{Pith}} \bullet \overrightarrow{n_i}$$

Par commodité de calcul, on peut prendre le point P_{ith} ou le point réel palpé P_i, cela ne modifie pas le produit scalaire :

$$\overrightarrow{D_{Pith}} \bullet \overrightarrow{n_i} = \left(\overrightarrow{D_{Pi}} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{P_iP_{ith}}\right) \bullet \overrightarrow{n_i}$$

$$\overrightarrow{D_{Pith}} \bullet \overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{D_{Pi}} \bullet \overrightarrow{n_i}$$

avec : $\overrightarrow{P_iP_{ith}} = k \bullet \overrightarrow{n_i}$

Le produit scalaire $\overrightarrow{D_{Pith}} \bullet \overrightarrow{n_i}$ peut se représenter comme le comoment de deux torseurs :

- le torseur de petits déplacements $\{\mathcal{D}\}$;
- et un torseur représentant le point de palpage et la direction de palpage associée. Cela revient à situer une droite dans le repère associé. Ce torseur $\{\mathcal{P}_i\}$, appelé *torseur des coordonnées plückériennes*, est défini comme suit :

$$\left\{\mathcal{P}_i\right\} = {}_{O_P}\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{n_i} \\ \\ \overrightarrow{OP_{ith}} \wedge \overrightarrow{n_i} \end{array}\right. = {}_{O_P}\left\{\begin{array}{c} n_{xi} \\ n_{yi} \\ n_{zi} \\ L_i = y_i.n_{zi} - z_i.n_{yi} \\ M_i = z_i.n_{xi} - x_i.n_{zi} \\ N_i = x_i.n_{yi} - y_i.n_{xi} \end{array}\right.$$

Vérifions que : $\left\{\mathcal{D}\right\} \bullet \left\{\mathcal{P}_i\right\} = \overrightarrow{D_{Pith}} \bullet \overrightarrow{n_i}$.

Nous obtenons en développant le comoment (attention de bien exprimer les torseurs au même point) :

$$\left\{\mathcal{D}\right\} \bullet \left\{\mathcal{P}_i\right\} = \overrightarrow{\Omega} \bullet \left(\overrightarrow{O_P P_{ith}} \wedge \overrightarrow{n_i}\right) + \overrightarrow{D_{O_P}} \bullet \overrightarrow{n_i}$$

Le champ de moment permet d'écrire :

$$\overrightarrow{D_{O_P}} = \overrightarrow{D_{Pith}} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{P_{ith} O_P}$$

Ce qui donne :

$$\left\{\mathcal{D}\right\} \bullet \left\{\mathcal{P}_i\right\} = \left(\overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{O_P P_{ith}}, \overrightarrow{n_i}\right) + \overrightarrow{D_{Pith}} \bullet \overrightarrow{n_i} + \left(\overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{P_{ith} O_P}, \overrightarrow{n_i}\right)$$

On remarquera que les deux produits mixtes s'annulent. La nouvelle expression de l'écart e_i sera donnée par :

$$e_i = \xi_i - \left(n_{xi} u + n_{yi} v + n_{zi} w + L_i \alpha + M_i \beta + N_i \gamma\right)$$

En résumé, à un déplacement exprimé par le torseur de petits déplacements $\{\mathcal{D}\}$ correspond un ensemble de mesures $\{e_i\}$ déduit à partir de l'ensemble initial de mesures $\{\xi_i\}$.

Notre objectif sera de déterminer le déplacement optimal $\{\mathcal{D}\}$ permettant de minimiser l'ensemble $\{e_i\}$.

Note : *en plus des paramètres géométriques de position, il est possible d'ajouter des paramètres de forme δr_i intrinsèques à la surface (comme une variation de rayon pour un cylindre). L'expression précédente devient*[1] *:*

$$e_i = (\xi_i - \delta r_i) - (n_{xi}u + n_{yi}v + n_{zi}w + L_i\alpha + M_i\beta + N_i\gamma)$$

Dans la suite, nous ne chercherons pas à optimiser en intégrant ces critères de forme (la démarche reste identique, il suffit de prendre en compte ces nouvelles variables complémentaires).

Critères d'optimisation

Minimiser l'ensemble $\{e_i\}$ n'a de sens que si l'on se donne un critère de minimisation.

Exemples de critères

- **Critère des moindres carrés :** rendre minimum : $Z_2 = \sum e_i^2$.
- **Critère du défaut de forme minimum (critère de Chebyshev)** : rendre minimum : $Z_\infty = Max\left[\left|e_i\right|\right]$.
- **Critère de la somme minimale des valeurs absolues :** rendre minimum : $Z_1 = \sum |e_i|$.

Application du critère des moindres carrés à un élément du type plan

Rappelons que chaque valeur e_i est donnée par l'expression :

$$e_i = \xi_i - (w + y_i\alpha - x_i\beta)$$

soit :

$$\boxed{Z_2 = \sum\left[\xi_i - (w + y_i\alpha - x_i\beta)\right]^2}$$

1. Bourdet P., Schneider F., *Spécification géométrique des produits. Cotation et tolérancement ISO*, Paris, Dunod, 2007.

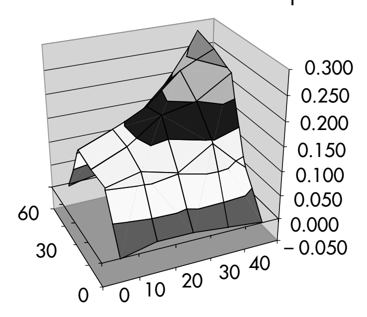
Z_2 sera minimum lorsque l'on aura simultanément :

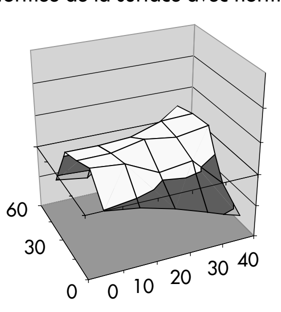
$$\frac{\partial Z_2}{\partial \alpha} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Z_2}{\partial \beta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Z_2}{\partial w} = 0$$

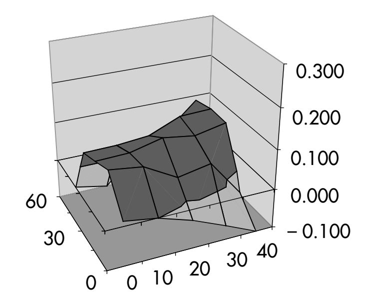
Exemple didactique

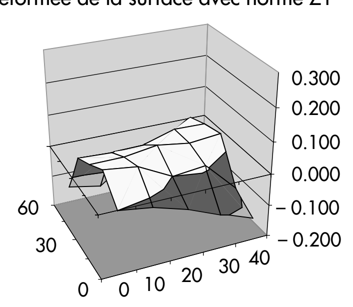
L'erreur suivant l'axe **z** a été fortement amplifiée (fig. 5.16).

Figure 5.16 : Exemple de choix de critères d'optimisation









Calcul du défaut de forme (exemple de la planéité)

Maintenant que l'on a une solution optimisée (α_0, β_0, ω_0), on peut calculer chaque e_{i0} correspondant à ce petit déplacement.

Le défaut de forme (planéité) sera donné par :

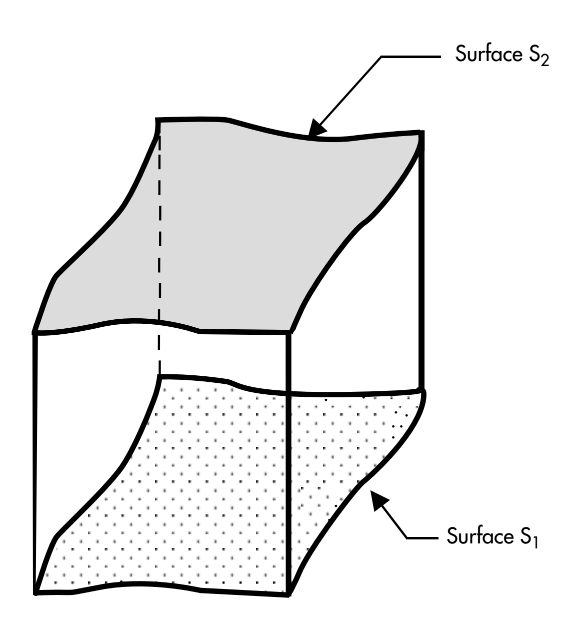
$$\Delta Planéité_{Optimisé} = Sup(e_{i0}) - Inf(e_{i0})$$

Insistons sur le fait qu'il est étroitement lié à la méthode d'optimisation retenue (on peut, en particulier, rechercher un défaut de planéité minimum en utilisant un solveur).

Calcul du défaut de position

Soit la pièce réelle de la figure 5.17.

Figure 5.17 : « Position relative » des surfaces réelles S_1 et S_2



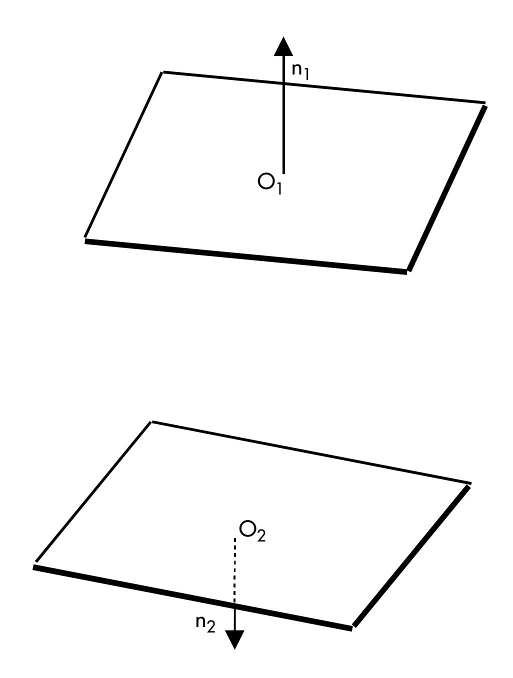
À chaque surface réelle S_i, nous sommes capables, suivant son type, d'associer un élément géométrique type (par exemple deux plans dans l'exemple).

Pour la mesure de défaut de forme, nous pouvions nous contenter de raisonner avec les centres de sphères et non sur les points réels de contact. Par contre pour des mesures dimensionnelles de positions relatives, cette ambiguïté devra être levée.

Par exemple, pour le plan associé, il faudra le décaler suivant la direction des $\boldsymbol{z_p}$ de manière à ce qu'il soit tangent à la pièce (matière). Compte tenu des remarques ci-dessus, on associe respectivement le plan P_1 à la surface S_1 et le plan P_2 à la surface S_2.

Souvent ces plans sont stockés dans la base de données uniquement par la position d'un point et d'une normale. Si la normale est parfaitement définie, le choix du point le plus représentatif de la surface est moins évident (effets de bords dus aux surfaces latérales). Soient O_1 et O_2 ces deux points (fig. 5.18).

Figure 5.18 : Définition de la position relative de deux plans



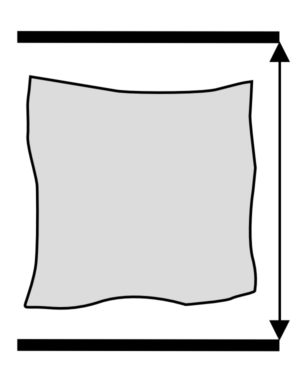
Les logiciels de machines à mesurer tridimensionnels ne mesurent pas tous la position relative entre les deux éléments plans de la même façon. Mathématiquement, cela n'a pas de sens puisque les deux plans, non parallèles, se coupent (formation d'un dièdre). Il faut être extrêmement prudent lors de l'établissement de la gamme de contrôle (par exemple, en utilisant la mesure de l'erreur de position, mais alors l'ordre des surfaces n'est plus indifférent).

Mesure par calibres virtuels

Il est possible d'imaginer la pièce réelle emprisonnée par **deux plans parallèles**, libres en rotation. Ces deux plans peuvent se rapprocher progressivement jusqu'à une position limite autorisée par la forme de la

pièce. Cette technique[1] permet d'englober les défauts de forme et de position. Elle présente un grand avenir pour vérifier la conformité des spécifications type GPS (fig. 5.19).

Figure 5.19 : Principe du calibre virtuel



Analyse modale d'une surface ou d'une courbe

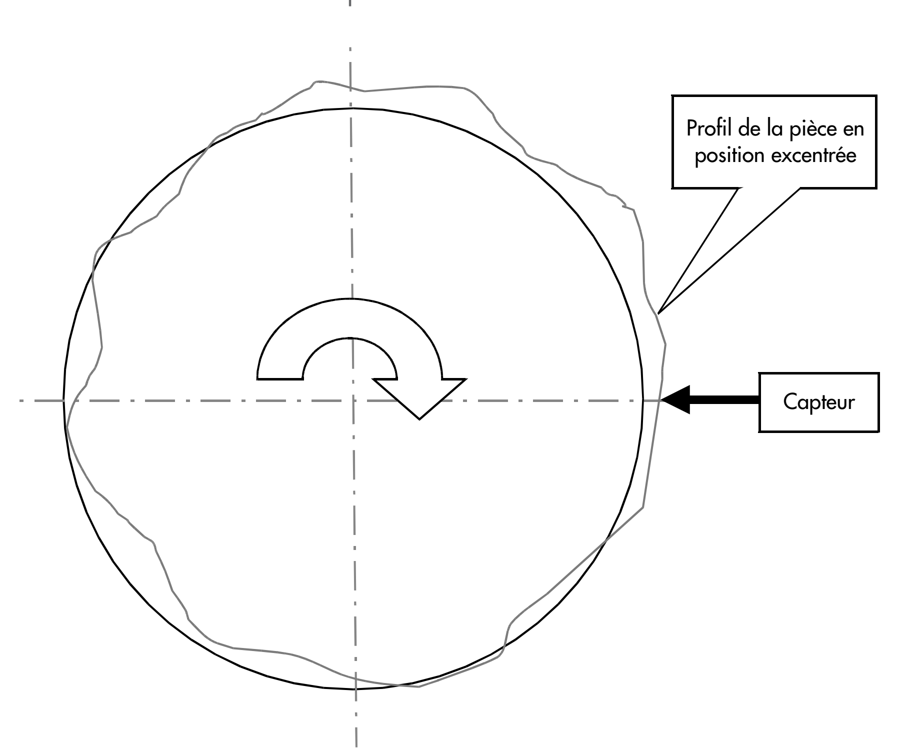
L'analyse modale[2] est une méthode générique d'analyse de forme, elle s'applique à tout type de géométrie pour obtenir automatiquement une base de défaut. À partir d'un nuage de points représentant la surface réelle dans sa position, la méthode « modale » propose, à la manière des séries de Fourier, de décomposer ce nuage en une somme incluant la valeur moyenne et les défauts associés, triés selon leur degré de complexité (position, forme, ondulation, etc.). Méthode à fort potentiel, sa présentation sort du cadre de cet ouvrage. Par contre, son application est facile à interpréter par le métrologue. Par exemple, cette approche est intuitive lors de mesure de circularité.

1. Pairel É., *Logiciel GeoVerif*, laboratoire SYMME, *www.polytech.univ-savoie.fr*.
2. Adragna P.-A., Samper S., Pillet M., Favreliere H., « Analysis of Shape Deviations of Measured Geometries with a Modal Basis », *Journal of Machine Engineering*, vol. 6, 2006, p. 134-143.

Mesure de la circularité par « analyse de Fourier[1] »

Lorsque l'on mesure une circularité, celle-ci est fortement perturbée par la non-coïncidence entre « l'axe » de la pièce et l'axe de rotation du plateau. Une table à chariots croisés permet de s'affranchir progressivement de ce problème (fig. 5.20).

Figure 5.20 : Position du profil par rapport au plateau de la machine



Plusieurs solutions permettent un dégauchissage assisté. L'analyse par série de Fourier en est une.

En effet, dans la formule suivante :

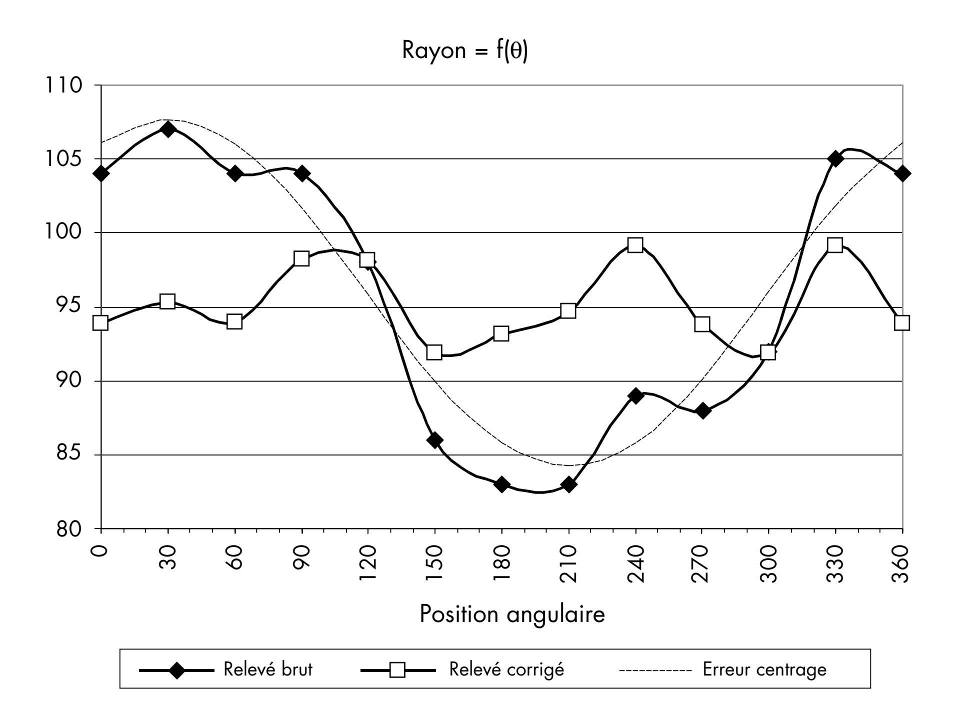
$$f(\theta) = a_0 + a_1 \bullet \cos(\theta) + b_1 \bullet \sin(\theta) + \ldots + a_n \bullet \cos(n\theta) + b_n \bullet \sin(n\theta) + \ldots$$

1. Joseph Fourier (1768-1830), mathématicien français connu pour la décomposition des fonctions périodiques en séries trigonométriques et de ses études sur la propagation de la chaleur.

le terme en a_0 peut se corriger en déplaçant plus ou moins le comparateur, et les termes a_1 et b_1 correspondent respectivement aux petits déplacements u et v à exécuter avec la table à chariots croisés.

Si l'on soustrait ces termes, il reste les défauts intrinsèques de la pièce (fig. 5.21).

Figure 5.21 : Exemple de dégauchissage par analyse de Fourier



Cette démarche peut se généraliser à tout type de surface, au prix d'une complexité accrue.

Chapitre 6

Éléments de statistiques appliqués à la mesure

Estimation d'une valeur vraie

Le mesurande est quantifié par une valeur vraie x_0 qui ne sera jamais exactement connue, mais simplement estimée soit par une valeur unique, soit par une moyenne de valeurs. En revanche, la vraie valeur x_0 peut être présentée comme appartenant probablement à un intervalle (nommé intervalle de confiance) fonction d'un seuil de probabilité d'appartenance fixé.

Estimation par une moyenne

Si l'on était capable de faire un nombre de mesures tendant vers l'infini, nous pourrions calculer la moyenne μ de cet ensemble. La valeur vraie peut être assimilée à μ, sous réserve que l'appareil ne présente pas de biais. Maîtriser l'erreur de justesse, revient à estimer ce biais pour pouvoir faire éventuellement des corrections :

$$x_0 = \mu + b$$

Pour des raisons économiques, techniques et de temps, nous limiterons le nombre de mesures. Cela revient à dire que μ sera simplement estimée par les informations que l'on pourra retirer du ou des échantillon(s) en notre possession. À partir des mesures x_i de l'échantillon, nous calculerons une moyenne arithmétique $\bar{x}$, qui est une valeur particulière de $\bar{X}$[1]. $\bar{X}$ est un estimateur de la moyenne μ de la population :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

> ***Rappel :*** *$\bar{X}$ est une variable aléatoire. Pour chaque échantillon, on obtiendra une valeur particulière :*
>
> $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

1. NF ISO 3534-1, Statistique – Vocabulaire et symboles – Partie 1 : Termes statistiques généraux et termes utilisés en calcul des probabilités.

Dispersion de $\bar{X}$

Les n mesures de l'échantillon sont censées appartenir à une population de taille N supposée infinie ($N >> n$). La dispersion de la population de mesures est caractérisée par sa variance σ^2. Cette variance sera estimée à partir des données de l'échantillon avec l'emploi de l'estimateur S^2 :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

S^2 est une variable aléatoire qui dépend de l'échantillon retenu. Pour un échantillon particulier, nous obtenons une variance d'échantillon observée notée s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$\nu = n-1$ représente le nombre de degrés de liberté (n variables indépendantes, liées par l'équation donnant la moyenne, qui est nécessaire pour le calcul de s^2).

Nous sentons intuitivement que la performance de l'estimateur $\bar{X}$ va dépendre de la taille de l'échantillon n mais également de la dispersion de la population mère. Cette dernière est soit connue (du fait d'un grand nombre de mesures préalables), soit quantifiée à l'aide de s^2 à partir des valeurs de l'échantillon.

Cas où σ est connu

En toute rigueur, ce cas n'existe jamais. En revanche, si l'on connaît la reproductibilité du moyen de mesure depuis un certain temps, on peut admettre que ce cas est applicable.

Partant de la loi des mesures supposée normale :

$$Loi(X_i) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),$$

on en déduit la loi pour $\bar{X}$:

$$Loi(\bar{X}) = \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

qui s'écrit lorsque l'on passe en variable centrée réduite :

$$Loi(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}) = \mathcal{N}(0,1)$$

La formule donnant la variance de $\bar{X}$, soit

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

n'est valable que si n est petit devant N (le tirage sans remise n'affectant pas alors les caractéristiques successives de la population mère).

Cela donne l'intervalle de confiance suivant (u : variable de la loi normale centrée réduite ou loi de Gauss) :

$$\text{Prob}\left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

α représente le risque que l'hypothèse d'appartenance de la moyenne à cet intervalle ne soit pas vérifiée. Par exemple, si l'on retient un risque de 5 %, nous obtenons :

$$\text{Prob}\left[\bar{X} - 1{,}96 \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1{,}96 \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 0{,}95$$

Cas où σ est inconnu

Faute de mieux, nous allons travailler avec l'estimateur S. S donne une estimation assez médiocre de σ, particulièrement si n est petit. L'intervalle de confiance pour σ est donné à l'aide de la loi du χ^2 par :

$$\text{Prob}\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}} \bullet S \le \sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}} \bullet S\right] = 1 - \alpha$$

> **Exemple**
>
> Si S donne une estimation à partir de cinq valeurs, nous obtenons :
>
> $$\text{Prob}\left[\sqrt{\frac{4}{11{,}14}} \bullet S \le \sigma \le \sqrt{\frac{4}{0{,}48}} \bullet S\right] = 0{,}95$$
>
> $$\text{Prob}\left[0{,}60 \bullet S \le \sigma \le 2{,}87 \bullet S\right] = 0{,}95$$

La méthode pour obtenir l'intervalle de confiance sur la moyenne est dans le même esprit que dans le cas où σ est connu, mais cela revient à utiliser une sorte de coefficient de sécurité en remplaçant la variable u par la variable t (loi de Student).

$$\text{Prob}\left[\bar{X} - t_{n-1;1-\alpha/2} \bullet \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1;1-\alpha/2} \bullet \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Avec l'exemple précédent, cela donne :

$$\text{Prob}\left[\bar{X} - 2{,}78 \bullet \frac{S}{\sqrt{5}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2{,}78 \bullet \frac{S}{\sqrt{5}}\right] = 0{,}95$$

Comparaison de deux estimations de moyennes

Ce cas est assez fréquent lorsque l'on veut comparer les résultats :

- de deux machines ;
- de deux opérateurs ;
- de deux fournisseurs ;
- etc.

Paramétrage du problème

Chaque contexte de mesure d'indice 1 ou 2 est caractérisé par un échantillon propre (tableau 6.1).

Tableau 6.1 : Paramètres des deux sources de mesures

Taille échantillon	Moyenne population	Écart-type population	Moyenne : estimation échantillon	Écart-type : estimation échantillon
n_1	μ_1	σ_1	$\bar{x}_1$	s_1
n_2	μ_2	σ_2	$\bar{x}_2$	s_2

Les variables aléatoires d'échantillon X_1 et X_2 seront supposées être distribuées suivant une loi normale. Les échantillons de mesures ne sont pas appariés (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de lien par exemple ente la $j^{ème}$ valeur de l'échantillon 1 et la $j^{ème}$ valeur de l'échantillon 2).

Notre objectif est de savoir si la différence observée des moyennes notée D est significative ou non.

Nous retenons *a priori* l'hypothèse nulle H_0 ($\mu_1 = \mu_2$). D est une variable aléatoire :

$$D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \text{ avec : } E(D) = 0 \text{ (Hypothèse } H_0\text{)}$$

$$\sigma_D^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Test de comparaison

D étant une variable aléatoire, nous devons prendre une décision à partir de sa valeur observée d. Nous considérerons que nous sommes dans le cas ou σ_1 etσ_2 ne sont pas connus (donc *a priori* différents). Pour pouvoir faire une comparaison avec la variable t de Student, nous utiliserons la variable suivante :

$$Z = \frac{D - 0}{\sigma_D}$$

Z sera estimée par $z = \frac{d}{s_D}$.

La distribution de Z reste très proche de la distribution de Student, on considérera que l'hypothèse H_0 sera acceptée si

$$\left|\frac{d}{s_D}\right| < t_{\nu;1-\alpha/2}.$$

s_D est calculé à partir des estimations s_1 et s_2 :

$$s_D = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Le nombre de degrés de liberté ν est le plus souvent approché par $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Pour plus de rigueur, on peut utiliser le test de Welch[1] :

$$\nu = \frac{\left(s_D^2\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \cdot \left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \cdot \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

1. Pagès J., *Statistiques générales pour utilisateurs*, PUR, 2005.

Comparaisons d'échantillons appariés

Ce cas se produit par exemple lorsque qu'un échantillon de pièces est mesuré par deux personnes différentes ou sur deux moyens de mesures différents. De plus, chaque pièce est identifiée, si bien qu'il est possible de comparer les deux mesures obtenues pour chaque pièce. C'est un cas particulier de l'analyse de variance à deux facteurs sans répétition (le facteur pièce peut présenter plusieurs modalités, par contre l'autre facteur n'a que deux modalités).

Échantillon des différences

Pour chaque pièce i, on calcule la différence

$$d_i = x_{1,i} - x_{2,i}.$$

De cet échantillon de différences, on calcule les estimations suivantes :

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2$$

$$s_{\bar{d}}^2 = \frac{s_d^2}{n}$$

L'hypothèse nulle H_0 sera acceptée (risque α) si

$$\left|\frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}}\right| < t_{n-1;1-\alpha/2}.$$

Recherche de l'influence d'un facteur (analyse de la variance à un facteur)

Influence du facteur identifié

L'objectif est de savoir si les différences de moyennes lorsque le facteur varie (modalités), sont imputables au hasard (hypothèse nulle : H0) ou

si au moins une des moyennes diffère des autres (hypothèse : H1). Par exemple, le facteur peut être un changement :

- d'opérateurs ;
- de pièces ;
- de machines ;
- de posages ;
- d'atelier (environnement) ;
- etc.

Notations et présentation

Nous avons :

- n mesures (échantillon total) ;
- L niveaux du facteur d'influence étudié (modalités) ;
- r répétitions par modalité (r sera constant pour chaque modalité, donc $n = L \cdot r$).

Tableau 6.2 : Présentation des données

Facteur Modalités	Répétitions 1	…	j	…	r	Moyennes
1						
…						
i			y_{ij}			$\bar{y}_i$
…						
L						
						$\bar{y}$

y_{ij} est une valeur particulière de la variable Y_{ij}. Cette variable suit la loi :

$$Loi(Y_{ij}) = \mathcal{N}(\mu_{\mathbf{i}}, \sigma^2)$$

Nous supposerons que le facteur étudié agit seulement sur la moyenne. La non-influence sur la variance σ^2 *doit être vérifiée par un test (Cochran, Hartley, Bartlett…).*

Chaque variable Y_{ij} peut être représentée par une valeur moyenne, fonction de l'influence du facteur et un écart aléatoire (dispersion de mesure) :

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$$\text{Loi}(\varepsilon_{ij}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2); \forall i, j$$

$\text{Cov}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}) = 0; \forall (i, j) \neq (k, l)$ les mesures sont indépendantes.

Pour mettre en évidence l'influence (α_i) explicite de la modalité i du facteur, on retiendra l'écriture suivante (μ représentant la moyenne globale) :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

avec : $\sum_i \alpha_i = 0$.

Estimation des paramètres

μ est estimée par $\overline{y}$. Avec la notation précédente, il vient :

$$y_{ij} = \overline{y} + \hat{\alpha}_i + e_{ij}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{L} \sum_i \overline{y}_i$$

α_i est estimé par $\hat{\alpha}_i = \overline{y}_i - \overline{y}$

Estimation de la variance des résidus :

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2}{n - L} = \frac{\sum_i \sum_j \left(e_{ij}\right)^2}{n - L}$$

ou encore, comme ici $n = r \cdot L$:

$$s^2 = \frac{\sum_i \sum_j \left(e_{ij}\right)^2}{L(r-1)} = \frac{\sum_i s_i^2}{L}$$

Étude de la variabilité (sommes des carrés des écarts)

À chaque résultat de mesure y_{ij}, nous pouvons associer deux écarts :

- un écart à la mesure moyenne du facteur (influence pour la modalité *i*) :

$$\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right) ;$$

- un écart à la moyenne générale :

$$\left(y_{ij} - \bar{y}\right)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\left(y_{ij} + \left(-\bar{y}_i + \bar{y}_i\right) - \bar{y}\right).$$

L'équation d'analyse de variance donne :

$$\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 = \sum_i r\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 + \sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2$$

ou encore :

$$\sum_i \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 = r\sum_i \hat{\alpha}_i^2 + \sum_{ij} e_{ij}^2$$

Chaque terme représente une somme de carrés d'écarts, notée *SCE*. Soit :

SCE_T (variabilité totale) = SCE_F (variabilité due au facteur)
+ $SCE_{Résiduelle}$ (variabilité résiduelle).

À chaque somme correspond un nombre de degrés de liberté (*ddl*) (tableau 6.3).

Tableau 6.3 : Degrés de liberté des sommes d'écarts

SCE	Écart	Somme	Relations	*ddl* (v)
SCE_T	$\left(y_{ij} - \bar{y}\right)$	$\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2$	$\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \bar{y}\right) = 0$	$v_T = n - 1$
SCE_F	$\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right) = \hat{\alpha}_i$	$r \cdot \sum_i \left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2$	$\sum_i \hat{\alpha}_i = 0$	$v_F = L - 1$
SCE_R	$e_{ij} = \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)$	$\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2$	$\forall i \rightarrow \sum_j e_{ij} = 0$	$v_R = n - L$

Coefficient de détermination R^2

La variabilité se décompose en deux parties :

- une partie non maîtrisée, variabilité résiduelle, correspondant à SCE_R ;
- l'autre partie subissant l'influence du facteur étudié : SCE_F.

Dans le cas particulier, de l'analyse de la variance à un facteur, cela donne :

$$R^2 = \frac{SCE_T - SCE_R}{SCE_T} = \frac{SCE_F}{SCE_T}$$

Si ce rapport est égal à un, cela revient à dire que 100 % de la variabilité sont expliqués par le facteur d'influence.

Pour savoir, si la part de variabilité attribuée à la grandeur d'influence est significative, nous allons utiliser le test suivant.

Test sur l'effet supposé du facteur

Carrés moyens

En divisant chaque somme de carrés des écarts par le nombre de degrés de liberté associés, on obtient un carré moyen d'écarts (CME) représentant physiquement une variance.

Pour estimer la variance inter-lots (variance résiduelle), nous avons écrit :

$$s_R^2 = \frac{\sum_i \sum_j \left(y_{ij} - \overline{y}_i\right)^2}{n - L} = \frac{\sum_i \sum_j \left(e_{ij}\right)^2}{n - L}$$

$$CME_R = s_R^2 = \frac{SCE_R}{n - L}$$

Les lots étant de taille identique, nous pouvons utiliser également :

$$CME_R = s_R^2 = \frac{\sum_i s_i^2}{L}$$

CME_R correspond à l'estimation de la variance résiduelle.

De même, posons :

$$CME_F = \frac{SCE_F}{L-1}$$

$$CME_F = \frac{r \cdot \sum_i \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2}{L-1} = r \cdot \frac{\sum_i \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2}{L-1}$$

Si l'on retient l'hypothèse H_0, cela revient à dire que le changement de modalités n'a pas d'influence. Avec cette hypothèse, les différentes modalités peuvent être considérées comme des échantillons appartenant à la même population. La variance sur les moyennes d'échantillons est estimée par :

$$s^2_{\overline{y}_i} = \frac{\sum_i \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2}{L-1} = \frac{CME_F}{r}$$

L'espérance de $s^2_{\overline{y}_i}$ est égale à $\dfrac{\sigma^2}{r}$.

Donc, sous l'hypothèse H_0, l'espérance de CME_F devrait être :

$$\sigma^2 = CME_R.$$

Le test consiste à comparer CME_F à CME_R. Pour cela, on calcule le rapport :

$$F_{Observé} = \frac{CME_F}{CME_R} = \frac{SCE_F / L-1}{s_R^2} = \frac{r \cdot \sum_i \left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2 / L-1}{s_R^2}$$

Si H_0 est vraie, la variable $F_{Observé}$ suit la loi :

$$Loi(F_{Observé}) = F^{\nu_1 = L-1}_{\nu_2 = n-L}(1-\alpha).$$

L'hypothèse H_0 sera retenue si :

$$F_{Observé} < F^{\nu_1 = L-1}_{\nu_2 = n-L}(1-\alpha)$$

(test de Snedecor).

Exemple : mesure d'une cale sur machine à mesurer

Suite à l'acquisition de mesures d'une cale-étalon sur machine à mesurer tridimensionnelle, on a des doutes sur l'incidence de la position de la cale par rapport à la machine. En effet, ce n'est pas les mêmes masses de chariots mises en mouvement suivants les axes utilisés (tableau 6.4).

Tableau 6.4 : Mesure d'une cale en faisant varier sa position

Mesure d'une cale de 75 mm suivant différentes orientations sur MMT							
	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5	$\bar{y}_i$	s_i
Plan YZ, mesure axe Z	75,002	75,002	75,001	75,001	75,000	75,0012	0,0008
Plan YZ, mesure axe Y	74,996	74,996	74,996	74,995	74,996	74,9958	0,0005
Plan XY, mesure axe X	74,994	74,996	74,994	74,996	74,996	74,9952	0,0011
Plan XY, mesure à 45°	74,999	74,998	74,998	74,997	74,999	74,9982	0,0008

Résultats de l'analyse de variance à un facteur (la position de la cale) (tableau 6.5).

Tableau 6.5 : Résultats de l'analyse de variance

Source	ddl	SCE	CME
MMT (résiduel)	16	0,00001120	0,00000070
Position	3	0,00011160	0,00003720
Total	19	0,00012280	0,00000646

$R^2 =$	90,88 %
$F_{observé} =$	53,143
$F_{calculé} =$	3,24

Remarque : *l'utilitaire d'analyse Excel™ permet d'obtenir directement cette étude (tableau 6.6).*

Tableau 6.6 : Analyse directe avec Excel™

ANALYSE DE VARIANCE						
Source des variations	Somme carré	Degré liberté	Moyenne carrés	F	Probabilité	Valeur critique pour F
Entre groupes	0,0001116	3	3,72E-05	53,143	1,53E-08	3,23886695
À l'intérieur des groupes	1,12E-05	16	7E-07			

Conclusion : *l'hypothèse H_0 est refusée, la position de la cale semble avoir de l'influence sur la mesure.*

Test non significatif (H_0 est acceptée)

Lorsque H_0 est acceptée, cela revient à dire qu'il n'y a pas de détection d'influence du facteur. On peut considérer que l'on a un seul gros échantillon de taille $n = L \cdot r$:

$$s_R^2 = \frac{SCE_T}{n-1}$$

soit comme intervalle de confiance pour la variance :

$$\text{Prob}\left[\frac{\nu_R}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2 \le \sigma_R^2 \le \frac{\nu_R}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2\right] = 1-\alpha$$

$$\text{Prob}\left[\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2 \le \sigma_R^2 \le \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2\right] = 1-\alpha$$

La moyenne générale μ est estimée par $\bar{y}$ avec une variance $\frac{s_R^2}{n}$.

Soit comme intervalle de confiance sur la moyenne :

$$\text{Prob}\left[\bar{y} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{s_R}{\sqrt{n}}\right) \le \mu \le \bar{y} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{s_R}{\sqrt{n}}\right)\right] = 1-\alpha$$

où t est la variable de Student à $n - 1$ degrés de liberté.

Test significatif (H_0 est refusée)

Nous avions modélisé la mesure par : $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$.

Si H_0 est vraie, c'est que l'on pense avoir : $\alpha_i = 0; \forall i$.

Dans le cas contraire, c'est que manifestement, il existe au moins un α_i très différent de 0 (au moins une modalité du facteur F a une grosse influence).

Il va falloir distinguer une variance résiduelle σ_R^2 et une variance due au facteur σ_F^2.

La variance résiduelle est estimée par :

$$CM_R = s_R^2 = \frac{SCE_R}{n-L}$$

avec : $n-L$ degrés de liberté.

Soit comme intervalle de confiance pour la variance résiduelle :

$$\text{Prob}\left[\frac{\nu_R}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2 \leq \sigma_R^2 \leq \frac{\nu_R}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2\right] = 1-\alpha$$

$$\text{Prob}\left[\frac{n-L}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2 \leq \sigma_R^2 \leq \frac{n-L}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \cdot s_R^2\right] = 1-\alpha$$

Pour l'influence du facteur, nous ferons la distinction entre deux cas :

- soit la modalité du facteur est aléatoire (par exemple, position de la cale au hasard, choix des opérateurs…) ;
- soit il s'agit de modalités fixes (par exemple, comparaison inter-laboratoires).

Modalités aléatoires

CME_F a comme espérance : $E(CME_F) = \sigma_R^2 + r \cdot \sigma_F^2$.

La variance σ_F^2 peut être estimée par :

$$s_F^2 = \frac{CME_F - CME_R}{r} = \frac{CME_F - s_R^2}{r}$$

soit comme intervalle de confiance pour la variance :

$$\text{Prob}\left[\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{CME_F}{F_{n-L}^{L-1}(1-\frac{\alpha}{2})} - s_R^2\right) \leq \sigma_F^2 \leq \frac{1}{r} \cdot \left(CME_F \cdot F_{n-L}^{L-1}(1-\frac{\alpha}{2}) - s_R^2\right)\right] = 1-\alpha$$

Application à la mesure de la cale : nous considérerons que la position de la cale sur la machine est aléatoire et dépend du choix arbitraire de l'opérateur.

$$s_{Position} = 0.0027\,mm$$

$$\text{Prob}\left[0.0013 \leq \sigma_{Position} \leq 0.0055\right] = 0.95$$

Modalités fixes

Dans ce cas, le choix de la modalité n'est pas dû au hasard, il relève d'une volonté de comparaison (par exemple, comparaison inter-laboratoires).

Les effets de la modalité n° i sont notées α_i et estimées par $\hat{\alpha}_i = \overline{y}_i - \overline{y}$

On peut rechercher si une modalité a un effet très fort par rapport aux autres ou si l'on peut classer les modalités en groupes d'influence comparable (dans ce dernier cas on peut utiliser la méthode de Tukey-Kramer).

Nous allons envisager deux hypothèses pour la modalité α_i :

- hypothèse H_0 : la modalité n'a pas d'influence ($\alpha_i = 0$) ;
- hypothèse H_1 : la modalité est nettement différente de la valeur moyenne ($\alpha_i <> 0$).

Rappelons que α_i est estimé par $\hat{\alpha}_i = \overline{y}_i - \overline{y}$, qui peut se mettre sous la forme :

$$\hat{\alpha}_i = \overline{y}_i - \frac{1}{L}\sum_i \overline{y}_i$$

L'estimation de la variance est égale à $s^2_{\hat{\alpha}_i} = \frac{L-1}{L} \cdot \frac{s_R^2}{r}$.

Elle est plus faible que la variance sur la moyenne des modalités (particulièrement quand L est petit).

Comme nous travaillons avec un estimateur, nous utiliserons la loi de Student :

$$\text{Loi}\left(\frac{\hat{\alpha}_\text{i}}{\text{s}_{\hat{\alpha}_\text{i}}}\right) = t_{n-L}$$

L'acceptation de H_0 se fera à l'aide du test suivant (avec le risque α) :

$$\left|\frac{\hat{\alpha}_i}{s_{\hat{\alpha}_i}}\right| < t_{n-L;1-\frac{\alpha}{2}}$$

Remarque : *si l'on a une valeur vraie du mesurande (notée y_0), l'effet de la modalité (erreur systématique) est estimée par $\hat{\alpha}_i = \overline{y}_i - y_0$.*

Recherche de l'influence de deux facteurs (analyse de la variance à deux facteurs)

Nous devons traiter des données de mesures, obtenues pour différentes modalités de deux facteurs. Ce cas est souvent rencontré lorsque l'on cherche des influences potentielles sur la reproductibilité. Par exemple, dans les études « GRR » (chapitre 7) on cherche à connaître l'influence de la pièce et de l'opérateur sur la dispersion des mesures.

Expérimentalement (plan factoriel), on se fixera un nombre de modalités pour chaque facteur (par exemple trois opérateurs mesurant dix pièces). À chaque combinaison de modalités (un opérateur/une pièce) correspond une ou plusieurs mesures (*r* répétitions) (tableau 6.7).

Chaque mesure y_{ijr} est une occurrence de la variable Y_{ij} repérée par trois indices :

- i : indice de ligne (par exemple, opérateur A, B ou C) ;
- j : indice de colonne (par exemple, numéro de la pièce mesurée) ;
- r : indice de répétition.

Tableau 6.7 : Présentation des données avec deux facteurs

Modalités facteur 2

Modalités facteur 1	1	…	j	…	Q	*Moyennes*
1						
…						
i			$\left(\bar{y}_{ij1},\dots\bar{y}_{ijr}\dots\bar{y}_{ijR}\right)\rightarrow\bar{y}_{ij\bullet}$			$\bar{y}_{i\bullet\bullet}$
…						
P						
Moyennes			$\bar{y}_{\bullet j\bullet}$			$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$

Convention d'écriture des différentes moyennes

- Moyenne des R répétitions pour la combinaison modalité i du facteur 1 et modalité j du facteur 2 :

$$\bar{y}_{ij\bullet}=\frac{1}{R}\sum_{r}y_{ijr}$$

- Moyenne (QR) de toutes les mesures correspondant à la modalité i du facteur 1 :

$$\bar{y}_{i\bullet\bullet}=\frac{1}{QR}\sum_{j,r}y_{ijr}$$

- Moyenne (PR) de toutes les mesures correspondant à la modalité j du facteur 2 :

$$\bar{y}_{\bullet j\bullet}=\frac{1}{PR}\sum_{i,r}y_{ijr}$$

- Moyenne générale (PQR) de toutes les mesures :

$$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}=\frac{1}{PQR}\sum_{i,j,r}y_{ijr}$$

Modélisation

Pour mettre en évidence les influences explicites (α_i) de la modalité i du facteur 1 et (β_j) de la modalité j du facteur 2, on retiendra l'écriture suivante (μ représentant la moyenne globale) :

$$Y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijr}$$

$$\text{Loi}(\varepsilon_{ijr}) = \mathcal{N}(0, \sigma^2); \forall i, j, r$$

Notion d'interaction : si $\alpha\beta$ est différent de zéro, on parlera d'interaction entre les modalités i et j. Par exemple, pour la mesure de la pièce i par l'opérateur j, cela peut représenter la recherche systématique du diamètre maximum pour une pièce présentant un défaut d'ovalisation.

Analyse de la variabilité

Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'étudier sommairement la décomposition de la variabilité. Pour une étude plus approfondie, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés.

La variabilité totale (SCE_T) se décompose dans ce cas en quatre parties (tableau 6.8).

Tableau 6.8 : Sommes des carrés d'écarts et carrés moyens d'écarts

Source	*SCE*	*Ddl (v)*	*CME*
Totale	$\sum_i \sum_j \sum_r \left(y_{ijr} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$	$v_T = PQR - 1$	$CME_T = \frac{SCE_T}{PQR - 1}$
Facteur 1	$\sum_i QR\left(\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$	$v_{F1} = P - 1$	$CME_{F1} = \frac{SCE_{F1}}{P - 1}$
Facteur 2	$\sum_i PR\left(\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$	$v_{F2} = Q - 1$	$CME_{F2} = \frac{SCE_{F2}}{Q - 1}$
Interaction	$R\sum_i \sum_j \left(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2$	$v_{F1F2} = (P - 1) * (Q - 1)$	$CME_{F1F2} = \frac{SCE_{F1F2}}{(P - 1)(Q - 1)}$
Résidus	$\sum_i \sum_j \sum_r \left(y_{ijr} - \bar{y}_{ij\bullet}\right)^2$	$v_R = (R - 1) * (PQ)$	$CME_R = \frac{SCE_R}{PQ(R - 1)}$

On peut vérifier que :

$$\nu_T = \nu_{F1} + \nu_{F2} + \nu_{F1F2} + \nu_R$$

et :

$$SCE_T = SCE_{F1} + SCE_{F2} + SCE_{F1F2} + SCE_R$$

Test sur la validité de l'influence des facteurs

À partir des carrés moyens d'écarts calculés précédemment, on va comparer une valeur $F_{observé}$ à un F_{seuil} (test de Snedecor) :

$$F_{observé} < F_{\nu_2}^{\nu_1}(1-\alpha)$$

Nous allons vérifier :

$$\frac{CME_{F1}}{CME_R} \leq F_{PQ(R-1)}^{P-1}$$

$$\frac{CME_{F2}}{CME_R} \leq F_{PQ(R-1)}^{Q-1}$$

$$\frac{CME_{F1F2}}{CME_R} \leq F_{PQ(R-1)}^{(P-1)(Q-1)}$$

Si $F_{Observé}$ est plus grand que la valeur seuil, l'hypothèse de non-influence sera rejetée.

Exemple : analyse type GRR

Nous allons analyser une série de dix pièces, mesurées par trois opérateurs, chaque mesure étant répétée trois fois (tableau 6.9).

Tableau 6.9 : Exemple d'étude GRR

	Pièce 1	Pièce 2	Pièce 3	Pièce 4	Pièce 5	Pièce 6	Pièce 7	Pièce 8	Pièce 9	Pièce 10
Opérat. A	87,830 87,420 87,170	89,770 89,680 89,540	90,140 90,160 90,180	89,750 89,450 89,110	89,440 89,380 89,590	87,550 87,520 87,490	88,470 88,030 88,150	89,570 89,450 89,590	88,160 88,700 88,600	87,350 86,970 87,430
Opérat. B	88,120 88,080 87,955	89,870 89,970 90,070	90,670 90,430 90,440	89,820 89,580 89,530	89,060 89,040 89,190	87,630 87,560 87,640	88,370 88,410 88,540	89,300 89,430 89,430	88,850 88,890 89,150	87,730 87,460 87,610
Opérat. C	87,920 88,050 87,580	89,970 90,030 90,160	91,040 90,810 90,950	89,510 90,140 89,840	89,360 89,610 89,580	88,250 87,980 88,120	88,700 88,940 88,620	89,750 89,760 89,770	89,190 89,010 88,860	87,570 87,790 87,700

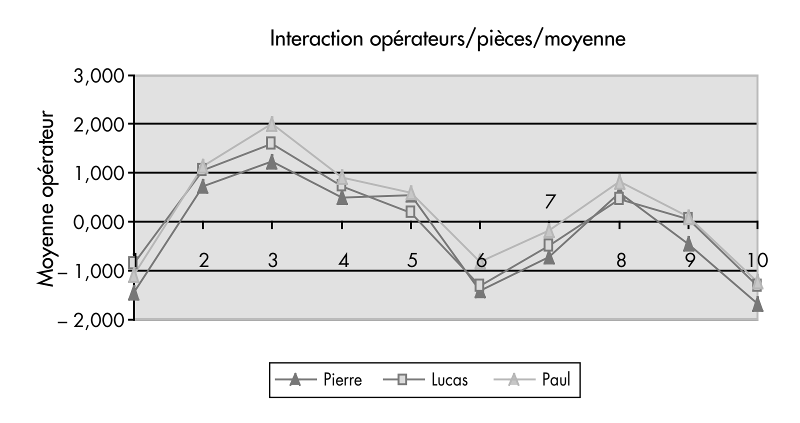
En reprenant le tableau 6.8, nous obtenons les résultats suivants (tableau 6.10).

Tableau 6.10 : Exemple d'étude GRR

Source	*SCE*	ddl(v)	*CME*	$F_{observé}$	F_{seuil}
Totale	91,6855	89	1,030		
Facteur « Opérateurs »	2,7838	2	1,392	48,983	3,150
Facteur « Pièces »	85,6567	9	9,517	334,933	2,040
Interaction	1,5400	18	0,086	3,011	1,778
Résidus	1,7050	60	0,028		

Les deux facteurs sont bien influents et l'on peut noter une interaction non nulle entre ces deux facteurs. Cela se manifeste en figure 6.1, par des courbes qui ne sont pas simplement décalées.

Figure 6.1 : Étude de l'interaction opérateurs/pièces



Cette exemple sera repris au chapitre 7. Notons que nous pouvions avoir directement ces résultats en utilisant l'utilitaire d'analyse d'Excel™ en choisissant « Analyse de variance : deux facteurs avec répétition d'expérience » (tableau 6.11).

Tableau 6.11 : Exemple direct avec Excel™

ANALYSE DE VARIANCE						
Source des variations	Somme carrés	Degré liberté	Moyenne carrés	F	Probabilité	Valeur critique pour F
Échantillon	2,783787222	2	1,391893611	48,983	2,44132E-13	3,5150411487
Colonnes	85,65668472	9	9,517409414	334,933	7,87534E-48	2,040096092
Interaction	1,540029444	18	0,085557191	3,0109	0,000711265	1,778445835
À l'intérieur du groupe	1,70495	60	0,028415833			
Total	91,68545139	89				

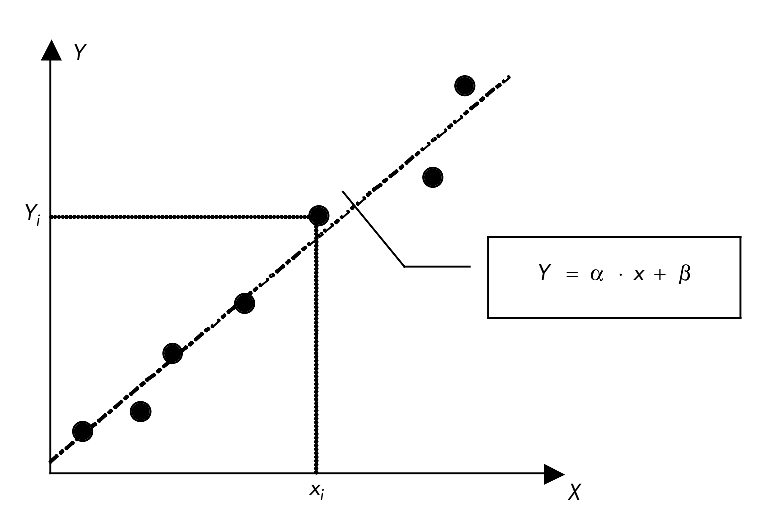
Régression linéaire

Cet outil statistique sera intéressant pour comparer deux séries de mesures d'*un même échantillon de pièces*, obtenues dans des contextes de mesure différents (changement de machine, de lieu, etc.). Par exemple, il permet de calculer les corrections de justesse en comparant les résultats d'une machine à mesurer étalon, en salle de métrologie, avec ceux donnés par une machine à mesurer en production (nous reviendrons plus en détail sur ce point aux chapitres 7 et 8).

Pour une même pièce n° i, nous reporterons la valeur x_i de la machine d'atelier en abscisse et la valeur y_i de la machine à mesurer étalon en ordonnée, comme le proposent C. Perruchet et M. Priel[1]. Cette disposition n'est pas naturelle. Pourtant, elle est justifiée car la machine d'atelier devrait fournir un résultat correspondant à la machine étalon. x_i n'est pas une valeur aléatoire, c'est la valeur lue. Par contre, pour une même valeur x_i, on peut s'attendre à différentes valeurs y_i correspondantes. Cette dernière est une valeur aléatoire. y_i est une valeur particulière de la variable Yi (fig. 6.2).

1. Perruchet C., Priel M., *Estimer l'incertitude*, AFNOR, avril 2000.

Figure 6.2 : Régression linéaire



Nous retiendrons comme modèle : $y_i = \alpha \cdot x_i + \beta + \varepsilon_i$.

ε représente les résidus. C'est une variable aléatoire supposée distribuée par une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$.

Malheureusement, ce modèle ne pourra qu'être estimé. En effet, nous n'avons qu'un échantillon de points (couples x_i, y_i). À l'aide de cet échantillon, nous proposons un modèle estimé : $y_i = a \cdot x_i + b + e_i$, en cherchant à minimiser $\sum e_i^2$ (méthode des moindres carrés).

En résumé, *a* et *b* ne sont que des estimations de α et β. La « qualité » de cette estimation sera fortement influencée par le nombre de points et l'étendue de mesure ($valeur_{maximum} - valeur_{minimum}$).

Estimation des paramètres

À partir des moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$, on en déduit :

$$a = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)}$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

Intuitivement, des machines identiques dans leur comportement devraient donner $a = 1$ et $b = 0$.

- Si b est différent de zéro, cela correspond à une erreur systématique correspondant à un décalage d'origine.
- Si a est différent de 1, cela correspond à un changement d'échelle (métriques différentes suivant les moyens de contrôle).

Incertitudes sur les paramètres

Il est évident que l'étendue de mesure, ou plage des « x », va améliorer la qualité des coefficients a et b mais également la distribution des points. Cela se traduira par l'emploi de l'indicateur « variance sur les x ». D'autre part a et b ne sont pas indépendants (covariance non nulle). En utilisant l'écart-type σ des résidus, cela donne :

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{1}{s_x^2}\right]$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left[1 + \frac{\overline{x}^2}{s_x^2}\right]$$

σ n'est en général pas connu. On devra travailler avec son estimation s.

$s^2 = \dfrac{\sum_i \left(y_i - a \cdot x_i - b\right)^2}{n-2}$ (il y a deux paramètres estimés).

Intervalle de confiance de la correction

L'utilité de l'étude précédente est de prévoir une correction sur la mesure brute x_* sans avoir recours systématiquement à une comparaison à la machine étalon. En résumé, quelle est la confiance que l'on peut avoir dans le résultat y_* calculé en fonction de la mesure brute x_*.

Dans le résultat donné par $y_* = a \cdot x_* + b$,

rappelons que nous ne sommes pas sûrs des coefficients *a* et *b*, soit :

$$s_{y_*}^2 = \left(x_*^2\right)\cdot\frac{s^2}{n}\left[\frac{1}{s_x^2}\right]+\left(1^2\right)\frac{s^2}{n}\left[1+\frac{\overline{x}^2}{s_x^2}\right]+2\cdot\left(x_*\right)\cdot\left(1\right)\cdot\frac{s^2}{n}\left[\frac{-\overline{x}}{s_x^2}\right]$$

Le dernier terme correspond à l'influence de la covariance entre *a* et *b* (pour plus de détails voir le chapitre 8 sur le calcul d'incertitudes).

$$s_{y_*}^2 = \frac{s^2}{n\cdot s_x^2}\cdot\left[x_*^2+s_x^2+\overline{x}^2-2\cdot x_*\cdot\overline{x}\right]$$

$$s_{y_*}^2 = \frac{s^2}{n\cdot s_x^2}\cdot\left[s_x^2+\left(x_*-\overline{x}\right)^2\right]$$

Nous venons de quantifier l'incertitude propre à la méconnaissance des facteurs α et β. Cela permet de calculer un intervalle de confiance sur la moyenne des y_* pouvant correspondre à la valeur x_*. Pour une valeur individuelle, il faut rajouter la variance propre et utiliser :

$$s_{y_*}^2 = \frac{s^2}{n\cdot s_x^2}\cdot\left[s_x^2+\left(x_*-\overline{x}\right)^2\right]+s^2$$

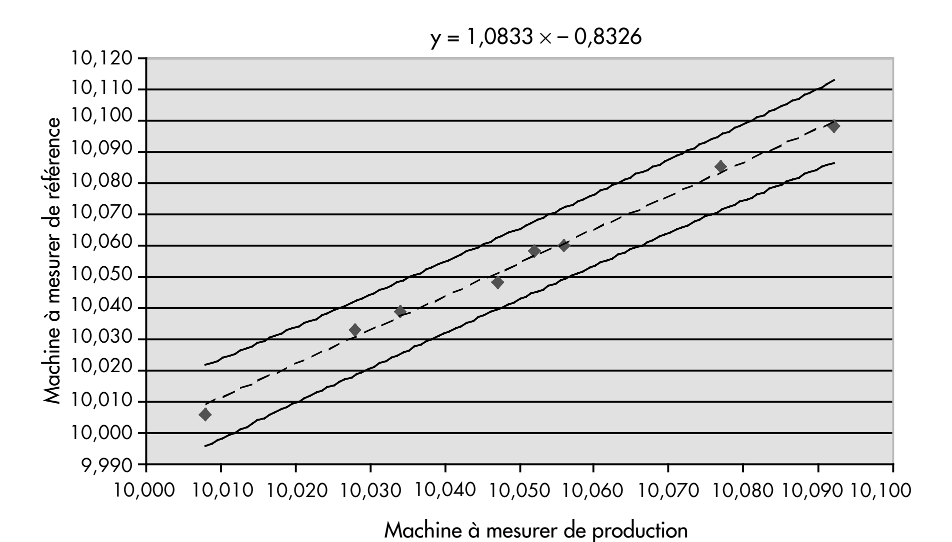
ou encore :

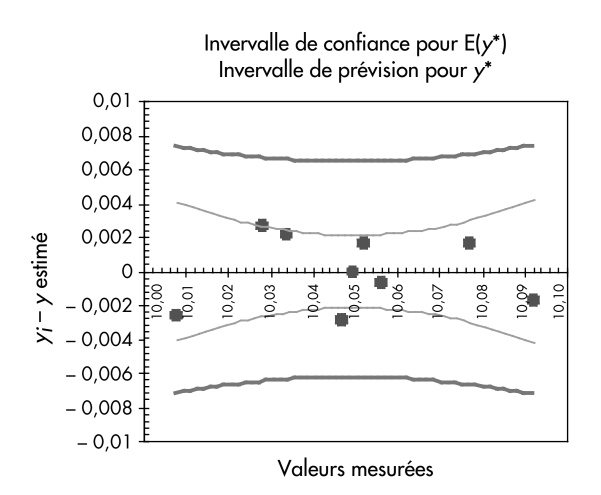
$$s_{y_*}^2 = s^2\cdot\left[1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_*-\overline{x}\right)^2}{n\cdot s_x^2}\right]$$

L'intervalle de confiance (fig. 6.3) (pour une probabilité de refus de α) est donné par :

$$\pm t_{n-2;1-\alpha/2}\cdot s_{y_*} = \pm t_{n-2;1-\alpha/2}\cdot s\cdot\left[1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_*-\overline{x}\right)^2}{n\cdot s_x^2}\right]^{1/2}$$

Figure 6.3 : Exemple d'intervalle de confiance pour la correction





Chapitre 7

Valider un processus de contrôle

Pour avoir confiance dans une mesure, il faut que l'ensemble des ressources humaines et matérielles du processus de contrôle conduisent à :

- une mesure fidèle (le processus réitère des résultats voisins) ;
- une mesure juste (la moyenne de ces résultats s'approche d'une valeur vraie).

Dans ce chapitre, nous chercherons à valider un processus de contrôle dédié à une tâche bien définie. Il s'agit d'appareils utilisés en production de série. Pour ceux d'emploi plus universel (un pied à coulisse par exemple), la justesse globale (sur toute l'étendue de mesure) sera estimée en utilisant l'outil « régression linéaire » vu aux chapitres 6 et 8.

Concept de fidélité

Cela sera perçu comme l'aptitude à donner des résultats de mesure voisins pour un même mesurande. Ce degré de voisinage est quantifié par une statistique du type *écart-type* ou *étendue de mesure*. Pour évaluer la robustesse de cette fidélité, il est judicieux d'envisager l'influence de diverses grandeurs pouvant perturber la qualité de cette statistique. Ces grandeurs constituent l'ensemble des 5M[1] du processus de mesure :

- moyen de contrôle : l'appareil (avec ses étalons) ;
- main-d'œuvre : l'opérateur (dextérité physique et compétence) ;
- matière : la pièce (problèmes de la géométrie, de la forme, de l'état de surface, etc.) ;
- méthode de mesure (protocole, traitement, etc.) ;
- milieu (température, vibrations, hygrométrie, etc.).

1. Duret D., Pillet M., *Qualité en production : de l'ISO 9000 à Six Sigma*, Paris, Éditions d'Organisation, 2005.

Il est pratiquement impossible de prendre en compte toutes les influences, soit simplement par ignorance, soit parce qu'on a estimé que cette influence particulière engendrait une variabilité très faible.

Lorsque les influences sont figées et que l'on ne prend en compte que l'influence de l'équipement de mesure sur une courte période de mesure (variabilité résiduelle), on définira la fidélité par la **répétabilité**[1]. Si au moins une des influences varie au cours des mesures, on parlera alors de **reproductivité**.

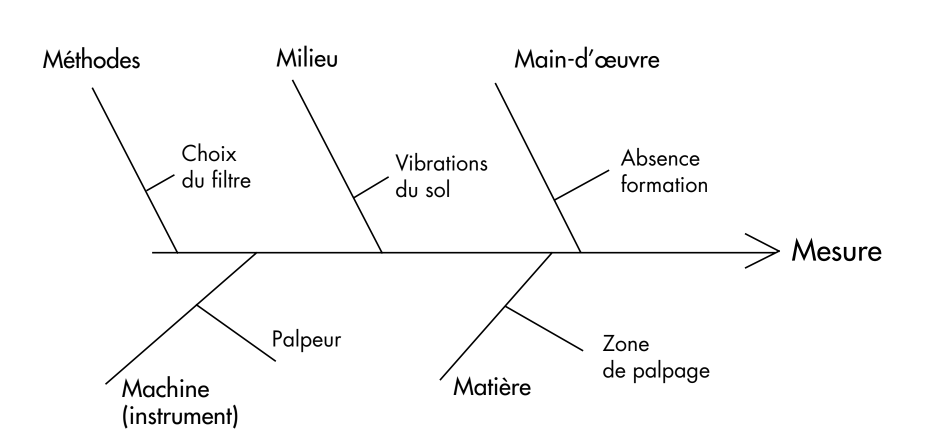
- **Répétabilité des résultats de mesurage** (*repeatability*) : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure :
  – même mode opératoire ;
  – même observateur ;
  – même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions ;
  – même lieu ;
  – répétition durant une courte période de temps.
- **Reproductibilité des résultats de mesurage** (*reproducibility*) : étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages du même mesurande, mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure décrites ci-dessus.
  Attention, car certaines entreprises limitent la reproductibilité (*reproducibility*) uniquement au complément dû à l'opérateur (*appraiser variation*). La prise en compte du temps est alors nommée stabilité (*stability/drift*) (fig. 7.1).

1. Les termes spécifiques à la métrologie (comme grandeur ou unité) sont définis dans le VIM (*Vocabulaire international de la métrologie*), PR NF ISO 99999 octobre 2006 (VIM), 3e éd.

Figure 7.1 : Deux perceptions du concept de reproductibilité

Reproductibilité
Répétabilité

Reproductibilité
(majorant de la répérabilité)
Répétabilité
Définition VIM



Industriellement, deux approches sont souvent retenues[1], à savoir la méthode du GUM[2] et la méthode GRR du MSA[3].

Méthode du *GUM*

Très pratique lorsque le résultat final Y dépend de mesures de bases X_i (entrées), elle nécessite de connaître la relation fonctionnelle :

$$Y = f(X_1, X_2 \ldots\ldots X_n)$$

1. Le lecteur pourra également consulter les normes CNOM0 : E41.36.110.N et GE41-013N, téléchargeables sur *www.cnomo.com*.
2. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM), NF ENV 13005 août 1999. L'AFNOR publie ce document sous la référence XP X 07-020.
3. Automotive Industry Action Group (AIAG) (2002). *Measurement Systems Analysis Reference Manual*, 3e éd., Chrysler, Ford, General Motors Supplier Quality Requirements Task Force (*www.carwin.co.uk/qs*).

En particulier, une mesure de base brute peut être affinée en appliquant des corrections c_i (vues comme des entrées). À la mesure corrigée, on peut associer une incertitude obtenue à partir du développement de f autour des moyennes des c_i en série de Taylor du premier ordre (étude reprise en détail au chapitre 8).

$$M_{cor} = M_{brute} + \sum c_i$$
$$\sigma_c^2(M_{cor}) = \sigma_{M_{brute}}^2 + \sum \sigma^2(c_i)$$

L'écriture précédente suppose que les corrections ne sont pas corrélées. Lorsqu'une correction n'est pas prise en compte, cela revient à faire une correction nulle. Ce qui ne veut absolument pas dire qu'il faut négliger l'incertitude associée à cette correction.

Les mesures corrigées sont plus du domaine des laboratoires. En production, pour un résultat immédiat, on demandera à l'équipement de donner directement le résultat. En cas de corrections, celles-ci devront être intégrées à ce dernier.

Méthodes GRR

Très employées dans l'industrie automobile, elles sont basées sur l'analyse de variance à deux facteurs avec répétition d'expériences. On retiendra les facteurs d'influence :

- opérateurs ;
- pièces.

En réalité, l'influence de la méthode est incluse dans l'influence de l'opérateur au cas où la procédure de mesure ne serait pas parfaitement explicite. Les autres influences seront masquées dans la variance résiduelle et s'ajouteront à la variance intrinsèque de l'appareil, c'est pourquoi l'on parlera d'incertitude de l'équipement de mesure.

Il existe principalement deux approches :

- GRR type « *average and range method* ». Cette approche suppose qu'il n'y a pas d'interactions entre les pièces et les opérateurs. Chaque mesure peut être modélisée par : $Y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijr}$, c'est-à-dire que la mesure de la $r^{ième}$ répétition est influencée par l'effet de la pièce (α_i) et par l'effet de l'opérateur (β_j). Il reste une part aléatoire

ε_{ijr} non identifiée explicitement qui vient s'ajouter au résultat moyen μ ;

- GRR type « *ANOVA* ». L'interaction « pièce-opérateur » peut se rencontrer du fait de méthodes de mesures propres à chaque opérateur. Par exemple, en cas d'ovalisation d'un alésage, un des opérateurs recherchera systématiquement le diamètre maximum, alors que, pour un autre, c'est la valeur minimum qu'il faut retenir. La modélisation sera légèrement différente, elle prendra en compte cette interaction : $Y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijr}$.

Pour les deux types d'études, nous associerons au processus de mesure un écart-type global appelé σ_{GRR} qualifiant l'incertitude de reproductibilité.

Notations des différents écarts-types recensés :

- σ_{GRR} : variabilité de reproductibilité de mesure ;
- σ_{EV} : variabilité de répétabilité (équipement de mesure) ;
- σ_{AV} : variabilité due à l'opérateur (au niveau de la mesure) ;
- σ_{PV} : variabilité du moyen de production (si non connue par MSP[1], elle sera estimée à l'aide de l'échantillon de dix pièces par exemple) ;
- σ_{TV} : variabilité totale (production & mesure). C'est celle qui est estimée en MSP.

GRR type « *average and range method* »

Cette méthode se veut simple et pragmatique. Nous la présenterons à l'aide de l'exemple donné en figure 7.2 sous forme de feuille de calcul.

Mode opératoire

On retient un nombre de *n pièces* différentes sélectionnées au hasard (ce qui laisse entendre qu'elles ne sont pas prélevées sur un intervalle trop court de production). Elles doivent donner, si possible, une bonne image de la dispersion globale du moyen de production. Ces pièces

1. Pillet M., *Appliquer la maîtrise statistique des procédés*, Paris, Éditions d'Organisation, 4e éd., 2005.

seront référencées et mesurées par *k opérateurs*, sans que ceux-ci voient le numéro d'identification. Cela permettra de faire mesurer les pièces plusieurs fois par chaque opérateur (*r répétitions*) en évitant des mesures successives sur une même pièce (il faut éviter la perturbation due à un « effet mémoire » de l'opérateur).

Pour pouvoir utiliser cette méthode sans correction particulière, il est demandé d'avoir un nombre d'opérateurs k et un nombre de pièces n vérifiant la relation suivante :

$$\boxed{k \bullet n \geq 16}$$

Formules statistiques de base

La dispersion de mesure est le plus souvent estimée à $6.\sigma$ (ce qui correspond, pour une distribution gaussienne centrée, à une probabilité de 99,73 %). Il est bien sûr possible de retenir un autre coefficient si on le désire.

L'écart-type est calculé directement à partir des moyennes d'étendues par une formule du type :

$$\sigma = \frac{\overline{R}_{ij}}{d_2}$$

où $\overline{R}_{ij}$ est calculée à l'aide de N sous-groupes ($N = k$ *opérateurs* $\times$ n *pièces*). Chaque sous-groupe (pièce i mesurée par l'opérateur j) a comme étendue R_{ij} (obtenue à partir des r répétitions de mesure x_{ijk}).

Tableau 7.1 : Tableau coefficient d_2

Nombre de répétitions	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Coef d_2	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078

Si $N \leq 15$, on retiendra un coefficient d_2 légèrement modifié appelé d_2^* [1].

1. Duncan A.J., *Quality Control and Industrial Statistics,*4e éd., Homewood, IL, Richard D. Irvin Inc., 1974.

Tableau 7. 2 : Tableau coefficient d_2^*

	Nombre N de sous-groupes														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 répétitions	1,414	1,279	1,231	1,206	1,191	1,181	1,173	1,168	1,163	1,160	1,157	1,154	1,153	1,151	1,149
3 répétitions	1,912	1,806	1,769	1,750	1,739	1,731	1,726	1,722	1,719	1,716	1,714	1,712	1,711	1,710	1,708

Calcul des moyennes et étendues

Rappelons que pour chaque pièce i mesurée (en général) deux ou trois fois par l'opérateur j, on calcule l'étendue R_{ij}.

Pour chaque opérateur j, on obtient :

- la moyenne de ses mesures :

$$\bar{x}_j = \bar{x}_{\bullet j \bullet}\ ;$$

- la moyenne des différentes étendues :

$$\bar{R}_{\bullet j} = \frac{\sum_i R_{ij}}{n}.$$

Avec la même démarche que celle utilisée en analyse de la variance (chapitre 6), en comparant les carrés moyens $CM_{Résiduel}$ et $CM_{Opérateur}$, nous allons utiliser :

- la moyenne des moyennes d'étendues :

$$\bar{\bar{R}}_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_j \bar{R}_{\bullet j}}{k}\ ;$$

- l'étendue des moyennes des opérateurs :

$$R_{\bar{x}} = \bar{x}_{Maxi} - \bar{x}_{\min i}.$$

Figure 7.2 : Exemple d'étude GRR (méthode moyenne et étendue)

Étude G R&R

Réf appareil :	CP035	Réf pièce :	CIMG349
Type de mesure :	Longueur axe	Valeur de référence :	10,000

	Pierre					Lucas					Paul					
Échantillon	Série 1	Série 2	Série 3	Moy	Etendue	Série 1	Série 2	Série 3	Moy	Etendue	Série 1	Série 2	Série 3	Moy	Etendue	Moy p
Pièce 1	10,150	10,150	10,280	10,193	0,130	10,070	10,025	10,080	10,058	0,055	10,040	10,000	9,980	10,007	0,060	10,086
Pièce 2	9,940	9,820	9,850	9,870	0,120	9,950	9,920	9,850	9,907	0,100	9,740	9,650	9,760	9,717	0,110	9,831
Pièce 3	9,980	10,050	10,060	10,030	0,080	10,020	9,980	10,050	10,017	0,070	9,960	10,020	9,990	9,990	0,060	10,012
Pièce 4	10,350	10,400	10,420	10,390	0,070	10,350	10,350	10,250	10,317	0,100	10,150	10,230	10,210	10,197	0,080	10,301
Pièce 5	9,710	9,620	9,550	9,627	0,160	9,530	9,550	9,660	9,580	0,130	9,460	9,580	9,480	9,507	0,120	9,571
Pièce 6	9,970	9,960	9,880	9,937	0,090	9,820	9,780	9,890	9,830	0,110	9,850	9,720	9,830	9,800	0,130	9,856
Pièce 7	10,510	10,650	10,660	10,607	0,150	10,470	10,550	10,490	10,503	0,080	10,300	10,290	10,350	10,313	0,060	10,474
Pièce 8	9,750	9,820	9,870	9,813	0,120	9,850	9,980	9,880	9,903	0,130	9,800	9,650	9,720	9,723	0,150	9,813
Pièce 9	10,110	10,100	10,005	10,072	0,105	10,160	10,210	10,110	10,160	0,100	9,920	10,020	10,060	10,000	0,140	10,077
Pièce 10	10,010	9,980	10,050	10,013	0,070	10,050	10,050	10,120	10,073	0,070	9,950	9,860	9,850	9,887	0,100	9,991
	Moy $\bar{x}$	10,055	Moy ét	0,11		Moy $\bar{x}$	10,035	Moy ét	0,09		Moy $\bar{x}$	9,91	Moy ét	0,10	R_P =	0,903

$\bar{\bar{R}}$ 0,102 Moyenne des moyennes $\bar{\bar{x}}$: 10,001 Différence $\bar{x}$: 0,141

Moyennes

Etendues

Pierre

Lucas

Paul

Analyse des mesures		
Répétabilité de l'équipement de mesure (EV Equipement Variation) $\sigma_{EV} = \frac{\bar{\bar{R}}}{d_2}$	*Pour 3 séries de mesure : d2 = 1,693* σ_{EV} = **0,060**	% EV = 100[EV/TV] **% EV = 20,05%** **σ_{EV} = 0,060**
Part de reproductibilité due à l'opérateur (AV : Appraiser Variation) $\sigma_{MoyOp} = \frac{R_{\bar{x}}}{d_2^*} = \sqrt{\frac{\sigma_{EV}^2}{n \bullet r} + \sigma_{AV}^2}$	*Pour 3 opérateurs : d2* = 1,9116* *Nombre de pièces / série : 10* *Nombre de séries r : 3* σ_{AV} = **0,073**	% AV = 100[AV/TV] **% AV = 24,39%** **σ_{AV} = 0,073**
Répétabilité et reproductibilité (GRR) $\sigma_{GRR} = \sqrt{[\sigma_{EV}]^2 + [\sigma_{AV}]^2}$	$\sigma_{R\&R}$ = **0,095**	% GR&R = 100[GR&R/TV] **% R&R = 31,57%** **$\sigma_{R\&R}$ = 0,095**
Dispersion pièce (Part Variation) *Si estimée à partir de l'échantillon mesuré :* *Sinon, calculée à partir de la valeur TV :*	**σ_{PV} = R_p / d_2^* = 0,284** **σ_{PV} =**	% PV = 100[PV/(TV)] **% PV = 94,89%** **σ_{PV} = 0,284**
Dispersion totale(Total Variation) *Si estimée à partir de mesures antérieures :* $\sigma_{TV} = \sqrt{\sigma_{GRR}^2 + \sigma_{PV}^2}$	**$\sigma_{TV\ connu}$ =** **$\sigma_{TVestimé}$ = 0,299**	**ndc = 4** **IT = 2** **Cpc = 3,5**

Validation des mesures

On peut utiliser les méthodes de la maîtrise statistique des produits pour vérifier que la différence de mesures obtenue par opérateur pour une même pièce reste dans des limites raisonnables.

Une différence trop importante entre les mesures d'une même pièce pour un opérateur donné (étendue forte) peut détecter un problème avec l'appareil ou un problème d'utilisation par l'opérateur. Réciproquement, des différences trop voisines de zéro sont douteuses (appareil bloqué ou en butée).

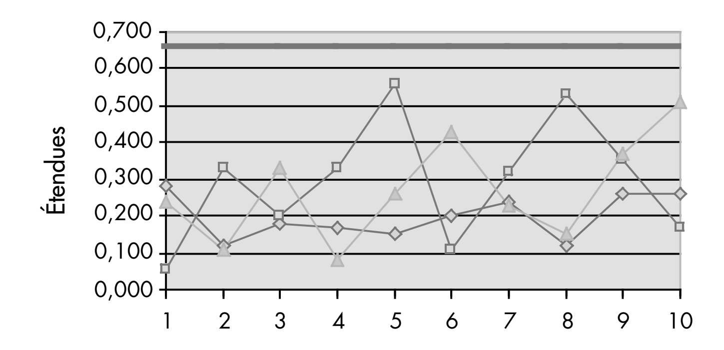
La limite supérieure de contrôle est donnée par la formule :

$$LSC_{R_{ij}} = D_4 \cdot \overline{\overline{R}}$$

avec :

Nb mesures/pièce/opérateur	2	3
D_4	3,267	2,574

Figure 7.3 : Exemple de surveillance de la dispersion par opérateur



Répétabilité *(Equipment Variation)*

La répétabilité de l'équipement de mesure est calculée à partir de la moyenne des moyennes d'étendues :

$$\sigma_{EV} = \frac{\overline{\overline{R}}}{d_2}$$

Nous avons $k \cdot n$ échantillons de taille 2 ou 3 (répétitions).

Incidence de l'opérateur sur la reproductibilité (*Appraiser Variation*)

Nous avons calculé l'étendue sur les moyennes des opérateurs :

$$R_{\overline{x}} = \overline{x}_{Maxi} - \overline{x}_{\min i}.$$

Nous pouvons en déduire l'écart-type sur les moyennes d'échantillons, à l'aide du coefficient d_2^* :

$$\sigma_{MoyOp} = \frac{R_{\overline{x}}}{d_2^*}$$

> ***Note :*** *nous retenons le coefficient d_2^* car nous avons un seul sous-groupe de deux ou trois moyennes (dans l'exemple traité, un sous-groupe de trois moyennes, trois opérateurs, soit $d_2^* = 1{,}912$).*

Rappelons que les moyennes d'échantillons extraits d'une même population mère de variance σ^2, sont distribuées avec une variance égale à $\sigma_{\overline{x}}^2 = \sigma^2 / (r \cdot n)$ ($r \cdot n$ correspondant ici à la taille des échantillons de mesure par opérateur).

Si l'influence des opérateurs est réellement nulle, nous devrions avoir $\sigma_{MoyOp} = \sigma_{\overline{x}}$, soit :

$$\frac{R_{\overline{x}}}{d_2^*} = \frac{\sigma_{EV}}{\sqrt{r \cdot n}}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- si le premier membre de l'équation est inférieur ou égal au second, nous considérerons que l'influence des opérateurs est nulle :

$$\sigma_{AV} = 0$$

- sinon, l'influence de l'opérateur sera caractérisée par la variance $\sigma^2{}_{AV}$, calculée à partir de la formule suivante :

$$\sigma_{MoyOp} = \frac{R_{\overline{x}}}{d_2^*} = \sqrt{\frac{\sigma_{EV}^2}{r \cdot n} + \sigma_{AV}^2}$$

$$\sigma_{AV} = \sqrt{\left(\frac{R_{\overline{x}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{\sigma_{EV}^2}{r \cdot n}}$$

Dispersions du processus de contrôle

La dispersion globale de l'équipement de mesure est donnée par :

$$\sigma_{GRR} = \sqrt{(\sigma_{EV})^2 + (\sigma_{AV})^2}$$

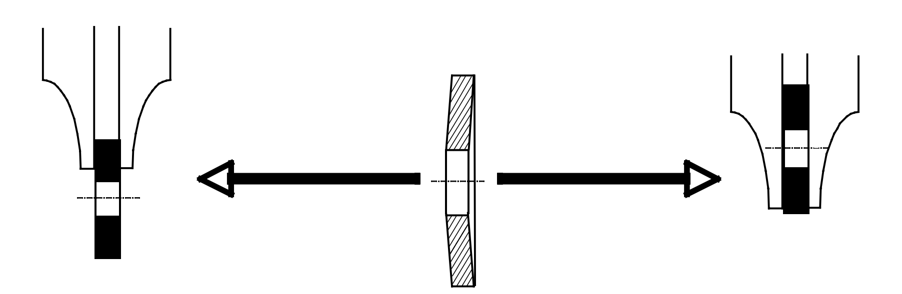
σ_{GRR} permet d'obtenir une estimation de la reproductibilité du processus de contrôle.

GRR type « *ANOVA* »

Ce cas correspond à une analyse de variances à deux facteurs avec répétitions d'expériences (traitée au chapitre 6). Elle permet de détecter des éventuelles interactions « pièces-opérateurs » et dans ce cas l'écart-type du processus σ_{GRR} de contrôle est légèrement modifié :

$$\sigma_{GRR} = \sqrt{(\sigma_{EV})^2 + (\sigma_{AV})^2 + (\sigma_{Inter})^2}$$

Figure 7.4 : Exemple d'interactions entre pièces et opérateurs (méthodes de mesure différentes)



Ce type d'étude donne une analyse plus fine et est préférable (exemple d'étude complète en figure 7.5).

Avant de faire une analyse de variance, il est souhaitable de vérifier si les dispersions par opérateurs sont homogènes ou si, dans le cas contraire, elles mettent l'accent sur un problème d'utilisation de l'instrument (instrument bloqué par exemple).

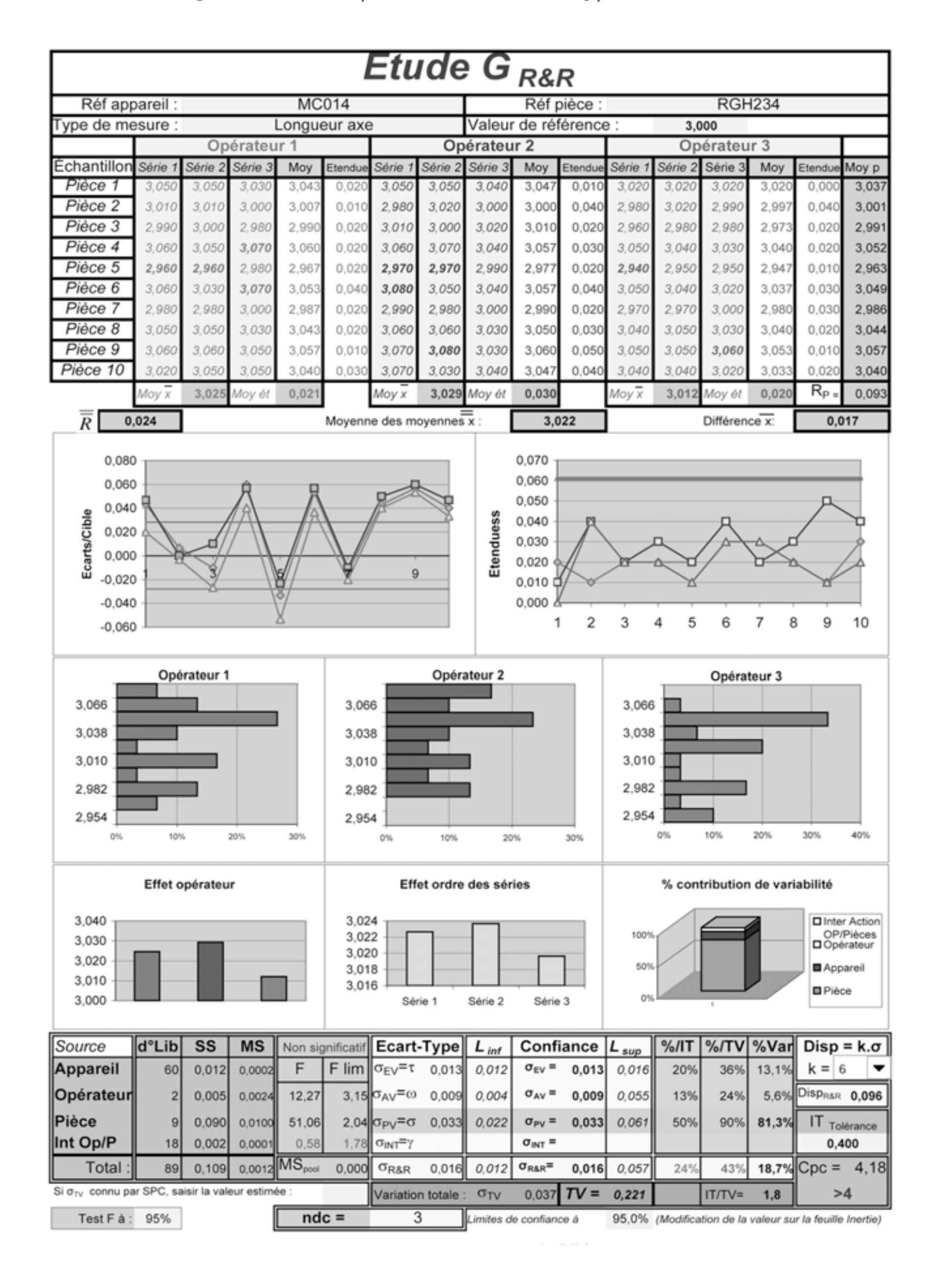
On peut utiliser pour cela les tests de Hartley, de Cochran ou de Bartlett.

Exemple : test de Cochran
(sous réserve du même nombre de mesures par opérateur)

Soit s_i^2 l'estimation de la variance pour l'opérateur *i*. On calcule le rapport $g = \frac{s_{Max}^2}{\sum s_i^2}$, que l'on compare à la valeur tabulée $g_{1-\alpha}$ (α représentant le risque encouru).

Cette valeur $g_{1-\alpha}$ est fonction du nombre d'opérateurs et du nombre de degrés de liberté pour chaque estimation ($\nu = n_{mesures} - 1$).

Figure 7.5 : Exemple de fiche GRR de type « ANOVA »[1]



Etude G R&R

Réf appareil :	MC014	Réf pièce :	RGH234
Type de mesure :	Longueur axe	Valeur de référence :	3,000

	Opérateur 1					Opérateur 2					Opérateur 3					
Échantillon	Série 1	Série 2	Série 3	Moy	Etendue	Série 1	Série 2	Série 3	Moy	Etendue	Série 1	Série 2	Série 3	Moy	Etendue	Moy p
Pièce 1	3,050	3,050	3,030	3,043	0,020	3,050	3,050	3,040	3,047	0,010	3,020	3,020	3,020	3,020	0,000	3,037
Pièce 2	3,010	3,010	3,000	3,007	0,010	2,980	3,020	3,000	3,000	0,040	2,980	3,020	2,990	2,997	0,040	3,001
Pièce 3	2,990	3,000	2,980	2,990	0,020	3,010	3,000	3,020	3,010	0,020	2,960	2,980	2,980	2,973	0,020	2,991
Pièce 4	3,060	3,050	3,070	3,060	0,020	3,060	3,070	3,040	3,057	0,030	3,050	3,040	3,030	3,040	0,020	3,052
Pièce 5	2,960	2,960	2,980	2,967	0,020	2,970	2,970	2,990	2,977	0,020	2,940	2,950	2,950	2,947	0,010	2,963
Pièce 6	3,060	3,030	3,070	3,053	0,040	3,080	3,050	3,040	3,057	0,040	3,050	3,040	3,020	3,037	0,030	3,049
Pièce 7	2,980	2,980	3,000	2,987	0,020	2,990	2,980	3,000	2,990	0,020	2,970	2,970	3,000	2,980	0,030	2,986
Pièce 8	3,050	3,050	3,030	3,043	0,020	3,060	3,060	3,030	3,050	0,030	3,040	3,050	3,030	3,040	0,020	3,044
Pièce 9	3,060	3,060	3,050	3,057	0,010	3,070	3,080	3,030	3,060	0,050	3,050	3,050	3,060	3,053	0,010	3,057
Pièce 10	3,020	3,050	3,050	3,040	0,030	3,070	3,030	3,040	3,047	0,040	3,040	3,040	3,020	3,033	0,020	3,040
	Moy $\bar{x}$	3,025	Moy ét	0,021		Moy $\bar{x}$	3,029	Moy ét	0,030		Moy $\bar{x}$	3,012	Moy ét	0,020	R_P =	0,093

$\bar{\bar{R}}$ 0,024 — Moyenne des moyennes $\bar{\bar{x}}$: 3,022 — Différence $\bar{x}$: 0,017

Source	d°Lib	SS	MS	F	F lim	Ecart-Type		L_{inf}	Confiance		L_{sup}	%/IT	%/TV	%Var
				Non significatif										
Appareil	60	0,012	0,0002	F	F lim	$\sigma_{EV}=\tau$	0,013	0,012	σ_{EV} =	0,013	0,016	20%	36%	13,1%
Opérateur	2	0,005	0,0024	12,27	3,15	$\sigma_{AV}=\omega$	0,009	0,004	σ_{AV} =	0,009	0,055	13%	24%	5,6%
Pièce	9	0,090	0,0100	51,06	2,04	$\sigma_{PV}=\sigma$	0,033	0,022	σ_{PV} =	0,033	0,061	50%	90%	81,3%
Int Op/P	18	0,002	0,0001	0,58	1,78	$\sigma_{INT}=\gamma$			σ_{INT} =					
Total :	89	0,109	0,0012	MS_{pool}	0,000	$\sigma_{R\&R}$	0,016	0,012	$\sigma_{R\&R}$=	0,016	0,057	24%	43%	18,7%
						Variation totale : σ_{TV}	0,037	TV =	0,221				IT/TV=	1,8

Disp = k.σ — k = 6 — $Disp_{R\&R}$ 0,096 — IT Tolérance 0,400 — Cpc = 4,18 — >4

Si σ_{TV} connu par SPC, saisir la valeur estimée :

Test F à : 95% — ndc = 3 — Limites de confiance à 95,0% (Modification de la valeur sur la feuille Inertie)

1. Téléchargeable sur le site : *http://www.ogp.univ-savoie.fr*.

Capabilité d'un processus de contrôle

Les indicateurs sont calculés en comparant les dispersions de mesures soit avec la dispersion de production, soit avec la tolérance de la caractéristique étudiée.

Conformité de l'appareil en contrôle de réception

Il s'agit dans ce cas de vérifier la conformité du produit destiné au client (externe ou interne). Cet indicateur de capabilité maximum potentielle du moyen de mesure revient à comparer la dispersion de mesure ($k \cdot \sigma_{RR}$) avec l'intervalle de tolérance IT.

Soit par exemple, les règles d'usage qui suivent.

Règle de l'édition 2 du MSA

Nous pouvons calculer les quatre indicateurs suivants (PV sera définie au chapitre suivant) :

$$\%EV = 100 \cdot \frac{6 * \sigma_{EV}}{IT}$$

$$\%AV = 100 \cdot \frac{6 * \sigma_{AV}}{IT}$$

$$\%R\&R = 100 \cdot \frac{6 * \sigma_{GRR}}{IT}$$

$$\%PV = 100 \cdot \frac{6 * \sigma_{PV}}{IT}$$

Tableau 7.3 : Règles « Édition 2 du MSA »

%R&R < 10 %	Équipement conforme
10 % < %R&R < 30 %	Acceptable (dérogation) si contraintes fortes (économique, disponibilité, limites techniques, etc.). Une démarche d'amélioration doit être entreprise.
30 % < %R&R	Problème de mesure (instruction de mesure à revoir, environnement, formation…). Sans amélioration potentielle, penser à changer de moyen.

Règle type « Maîtrise statistique des procédés »

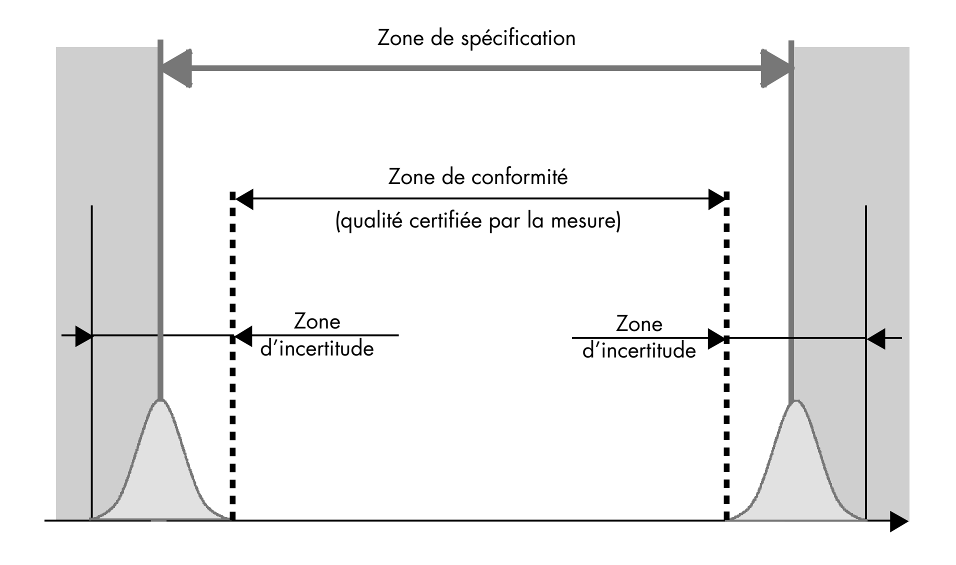
$$C_{mc} = \frac{IT}{6 \cdot \sigma_{RR}} \geq 4$$

Cette règle est un compromis, elle conduit à retenir $\sigma_{RR} \leq {}^{IT}\!/_{24}$.

Zone de conformité en contrôle de réception

La zone de spécification doit être réduite si l'on veut garantir la qualité fournie au client (ISO 14253 – Partie 1[1]). Si cette réduction n'est pas faite, il y a partage des risques entre le client et le fournisseur.

Figure 7.6 : Restriction de la zone de spécification pour garantir la qualité



1. NF EN ISO 14253-1 : 1998, mars 1999, Spécification géométrique des produits (GPS) – Vérification par la mesure des pièces et des équipements de mesure. Partie 1 : règles de décision pour prouver la conformité ou la non-conformité à la spécification.

Conformité de l'appareil en validation de processus

Industriellement, cette approche est moins utilisée. Dans la MSA[1], il est demandé de comparer la dispersion de l'appareil avec la tolérance (*%IT*) et également avec la dispersion du moyen de production (*%TV, TV : dispersion totale*). L'édition 3 insiste sur ce point en introduisant un nouvel indicateur le « *ndc*[2] » (*Number of Distinct Categories*) défini par :

$$ndc = \sqrt{2} \cdot \frac{\sigma_{PV}}{\sigma_{GRR}}$$

Origine du « *ndc* »

Partant de l'idée que la variation du processus de contrôle intervient dans la variabilité totale, on définit un facteur de discrimination *DR* :

$$DR = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sigma_{PV}^2}{\sigma_{TV}^2}}{1 - \frac{\sigma_{PV}^2}{\sigma_{TV}^2}}} = \sqrt{\frac{\sigma_{TV}^2 + \sigma_{PV}^2}{\sigma_{TV}^2 - \sigma_{PV}^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma_{PV}^2 + \sigma_{GRR}^2}{\sigma_{GRR}^2}}$$

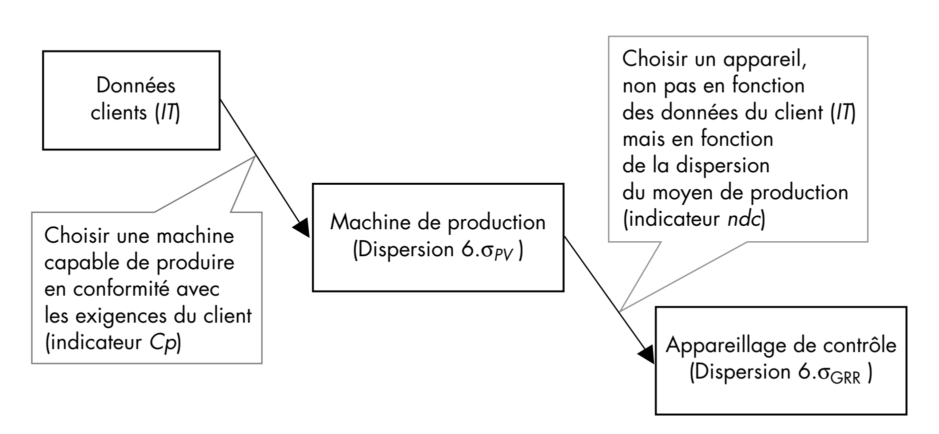
$$DR = \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma_{PV}^2}{\sigma_{GRR}^2} + 1} = \sqrt{ndc^2 + 1}$$

$$ndc = \sqrt{2} \cdot \frac{\sigma_{PV}}{\sigma_{GRR}}$$

Suivant l'importance de la part de variabilité due au processus de contrôle, le ratio *DR* peut varier de un à l'infini.

1. Automotive Industry Action Group (AIAG) (2002), *Measurement Systems Analysis Reference Manual*, 3e éd., Chrysler, Ford, General Motors Supplier Quality Requirements Task Force (*www.carwin.co.uk/qs*).
2. Wheeler D. J., Lyday R.W., *Evaluating the Measurement Process*, 2e éd., SPC Press Inc, 1989.

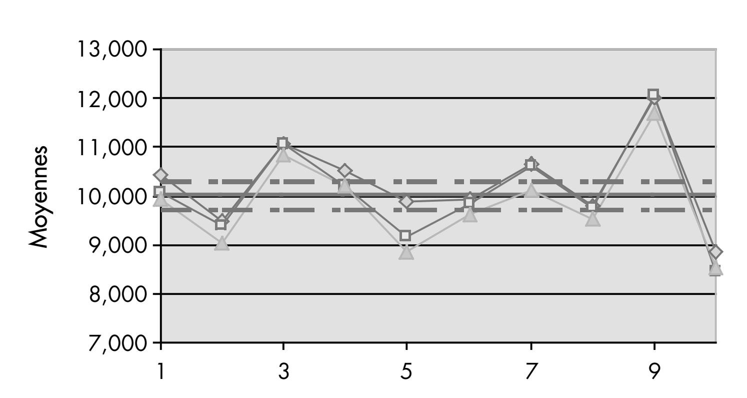
Figure 7.7 : Intégrer un processus de contrôle en fonction du « *ndc* »



Si la dispersion de production n'est pas connue, alors par défaut, elle sera estimée à partir du lot de pièces mesurées. Chaque pièce étant mesurée $k \cdot r$ fois (*k* opérateurs faisant chacun *r* mesures), on estime le mesurande (dimension de chaque pièce) par la moyenne des mesures.

Pour cela, il faut s'assurer que l'échantillon de pièces soit représentatif (image de la dispersion du moyen de production et 50 % environ des pièces en dehors du « bruit de mesure ») (fig. 7.8). *L'idéal est d'estimer la dispersion de production par une approche de type MSP.*

Figure 7.8 : Vérification de la représentativité de l'échantillon de pièces



À partir des *n* moyennes, on détermine l'étendue R_{PV}. À l'aide de ce résultat, on calcule un écart-type de production σ_{PV} (*Part to part Variation*) (dans l'exemple traité, il y a un sous-groupe de dix mesures).

$$\sigma_{PV} = \frac{R_{PV}}{d_2^*}$$

Partant de l'additivité des variances, on calcule la variation totale apparente du processus, incluant les dispersions de production et de mesure (*Total Variation*) :

$$\sigma_{TV} = \sqrt{\left(\sigma_{GRR}\right)^2 + \left(\sigma_{PV}\right)^2}$$

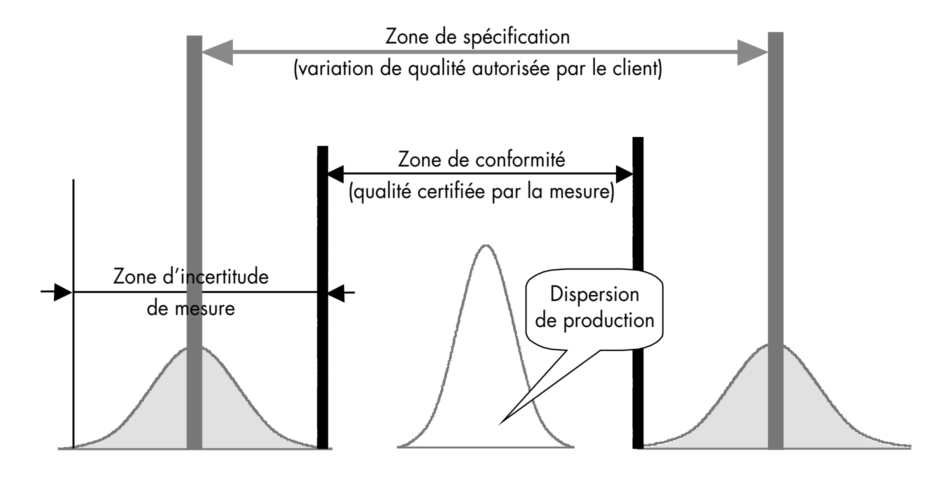
Attention, si l'on a des données provenant d'une démarche MSP, cela correspond probablement à σ_{TV}, car il y a de grandes chances que les mesures aient été faites avec cet appareil. On en déduit σ_{PV} et l'on calcule le nombre de catégories distinctes « *ndc* » qui, dans l'idéal, doit être supérieur ou égal à cinq :

$$ndc = Partie_entière\left(\sqrt{2} \cdot \frac{\sigma_{PV}}{\sigma_{GRR}}\right) \geq 5$$

Conformité de l'appareil en production dans le cas d'une capabilité du processus élevée

La démarche avec l'indice *ndc* vu précédemment est bien adaptée lorsque le processus de production est capable sans excès. Il peut arriver, suite à des problèmes de disponibilité et de charge machine, que l'on accepte de faire de la sur qualité. L'indicateur *Cp* est alors élevé (par exemple $Cp = 4$). Il est tout à fait possible, dans ce cas de figure, de piloter une production avec un appareil dispersant dans le même ordre de grandeur que le moyen de production, et cela sans risque pour le client.

Figure 7.9 : Cas d'un processus de production correspondant à un indicateur *Cp* élevé (possibilité d'une dispersion de mesure plus importante)



Cas des contrôles automatiques

De plus en plus, on voit apparaître en production de grande série des postes automatiques de contrôles finaux. C'est souvent une exigence du client (donneur d'ordre), rassuré par la mesure systématique des produits achetés. La mesure de toutes les caractéristiques de définition du produit exige des solutions technologiques d'acquisition très rapide (inférieure ou égale aux temps de production). Reste à savoir si la cadence élevée de contrôle ne détériore pas la qualité métrologique. Tout étant automatisé, l'influence de l'opérateur n'existe plus. Pourtant, comme la culture GRR est présente dans l'entreprise, on aimerait bien avoir « quelque chose d'équivalent » pouvant servir d'indicateur de qualité de mesure. Rappelons qu'une étude GRR n'est qu'une analyse de la variance à deux facteurs d'influence (pièces et opérateurs) avec répétition de la mesure (voir chapitre 6). On peut très bien faire le même type d'étude, où le facteur opérateur est remplacé par un facteur présumé influent (prise de pièce, indexation, milieu ambiant…). Une enquête de terrain, auprès des utilisateurs journaliers, est souvent riche d'enseignements pour détecter les facteurs d'influence.

Concept de justesse

L'étude précédente a permis de mettre en évidence l'influence de différents facteurs. Par exemple, si un des opérateurs donne des résultats plus forts que ses collègues, cela se remarquera. Par contre, si l'ensemble des opérateurs dérivent systématiquement de façon identique, cela ne se remarquera pas. En conséquence, il est nécessaire d'avoir une valeur vraie matérialisée par un étalon. La valeur vraie est par définition inconnue. Une mesure très fine de l'étalon (correction incluse) permet d'approcher cette dernière, on parlera *d'une valeur conventionnellement vraie*. C'est à partir de cette donnée que l'on testera l'appareil.

Une valeur étalon ne correspond pas forcément à une valeur nominale (par exemple, 50,000 mm). Physiquement, cela peut être une pièce, extraite de la production, qui a été mesurée par des moyens plus performants. L'estimation de l'écart moyen entre un échantillon de mesures de l'étalon et une valeur supposée vraie de l'étalon permet d'estimer un écart de **justesse locale** (*biais*). C'est pourquoi, si possible, il faudra retenir un étalon voisin des pièces à mesurer car bien évidemment l'erreur de justesse peut varier en fonction de l'entrée (défaut de linéarité et d'échelle).

L'erreur de justesse est définie par :

$$\Delta J = \mu - X_0$$

- μ correspond à la moyenne d'un nombre infini de mesures ;
- X_0 est la valeur de l'étalon (supposée vraie).

En réalité, nous ne pouvons qu'estimer l'erreur de justesse par :

$$\delta J = \bar{x} - x_0$$

- $\bar{x}$ est l'estimation de μ à l'aide des n valeurs de l'échantillon (l'incertitude sur cette estimation est de *type A*, voir chapitre 8) ;
- x_0 est la valeur donnée par le certificat d'étalonnage (estimation de X_0).

La tolérance d'étalonnage permet de calculer l'incertitude associée à la valeur étalon (incertitude de *type B*).

L'incertitude sur ΔJ est caractérisée par :

$\sigma_{\Delta J}^2 = \dfrac{\sigma_{Mesure}^2}{n} + \sigma_{Etalon}^2$ et estimée par : $s_{\Delta J}^2 = \dfrac{s_{Mesure}^2}{n} + s_{Etalon}^2$

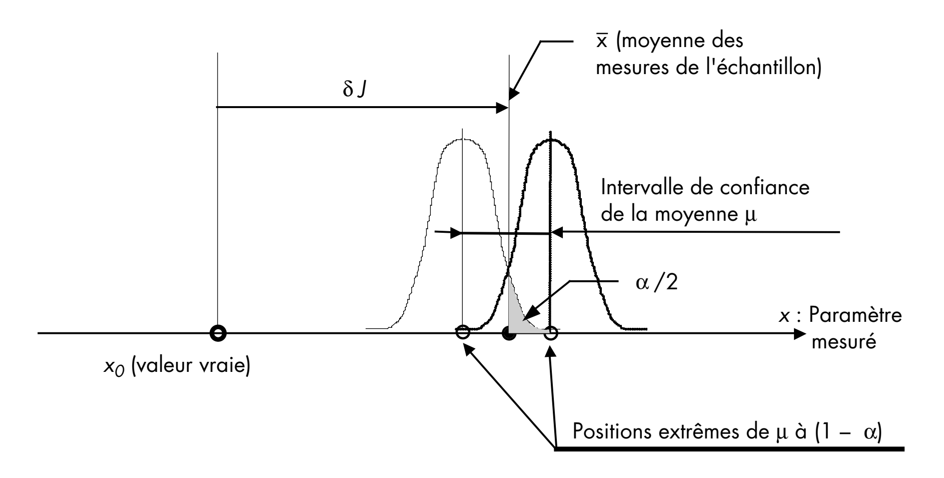
Par exemple, si le certificat d'étalonnage propose : $X_0 = x_0 \pm \tau_0$, on peut retenir avec l'hypothèse d'une distribution uniforme :

$$s_{\Delta J}^2 = \frac{s_{Mesure}^2}{n} + \frac{\tau_0^2}{3}$$

La qualité de l'estimation peut être bornée en utilisant la loi de Student (α représentant le risque, voir exemple figure 7.10) :

$$\text{Probabilité}\left[\delta J - t_{n-1;1-\alpha/2} \bullet s_{\Delta J} \leq \Delta J \leq \delta J + t_{n-1;1-\alpha/2} \bullet s_{\Delta J}\right] = 1 - \alpha$$

Figure 7.10 : Illustration de l'intervalle de confiance de l'erreur de justesse



Note : *tant que la valeur « x_0 » est incluse dans cet intervalle de confiance, il est possible que le biais mesuré ne soit que l'expression de la variabilité due à l'échantillonnage.*

Bornes d'acceptation pour l'erreur de justesse

Rappelons que l'on espère avoir un appareil avec une erreur de justesse tendant vers 0 (espérance nulle). Plusieurs règles peuvent être envisagées :

- si possible la valeur « 0 » doit rester fortement probable, c'est-à-dire qu'elle doit appartenir à l'intervalle de confiance (exemple figure 7.11).

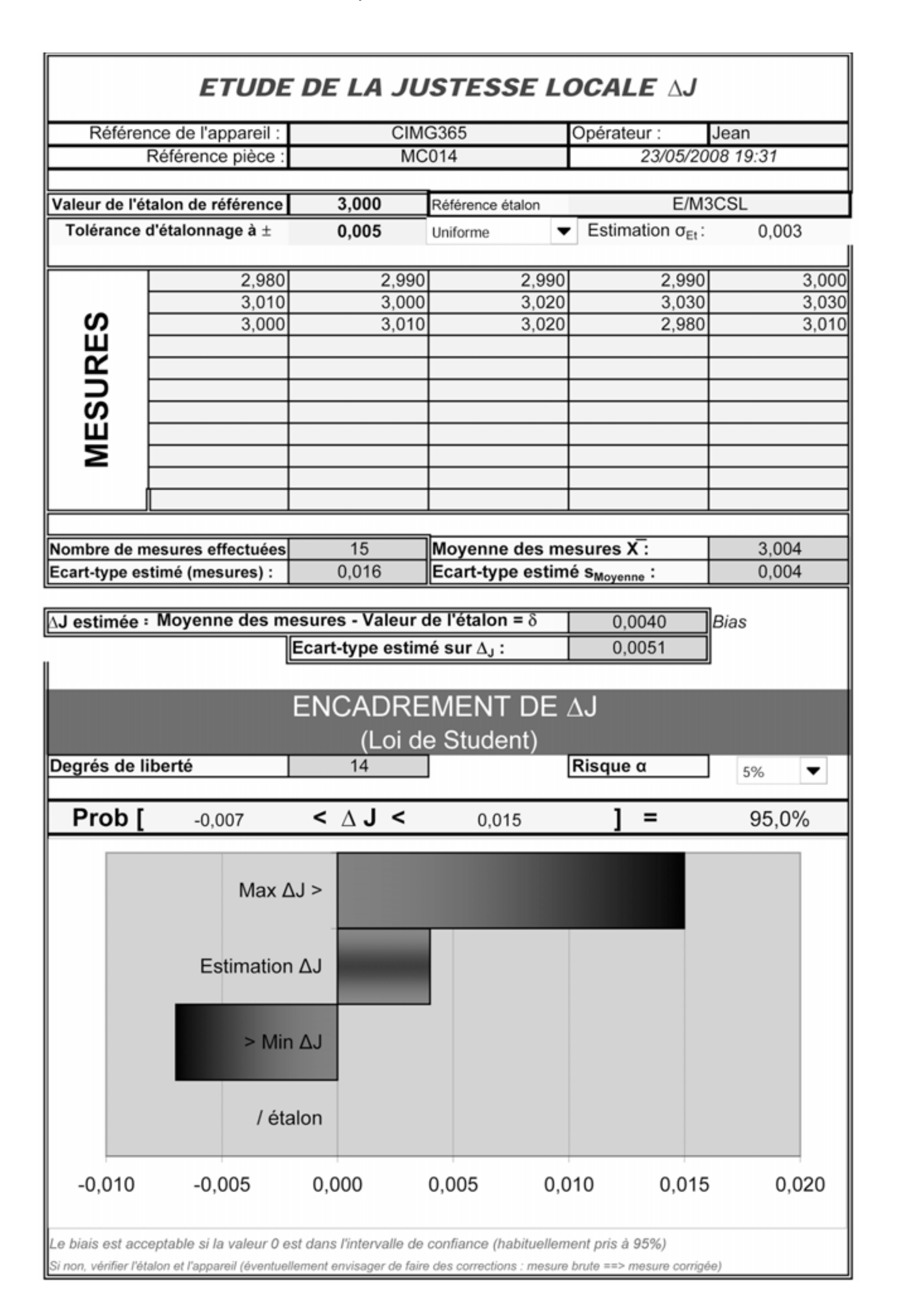
- si ce n'est pas le cas, cela peut éventuellement provenir également de l'estimation de l'écart-type sur ΔJ (valeur très faible due à des mesures pratiquement identiques), qui conduit à un fort resserrement des bornes de l'intervalle de confiance. Si cette hypothèse se confirme, on peut comparer ΔJ avec la tolérance et exiger par exemple (norme interne d'usage) :

$$\frac{|\Delta J|}{IT} < 1/20$$

Dans le cas contraire, on peut conclure à une erreur systématique de justesse effective et envisager une retouche ou un rebut de l'appareil. Il est possible de faire de la bonne mesure en corrigeant l'erreur de justesse, mais cela est dangereux en production. Cette approche est plus réservée à une mesure de laboratoire.

Rappelons qu'il s'agit ici d'une mesure de justesse locale. Dans le cas d'appareil de type universel à forte étendue de mesure, il faudra vérifier l'erreur de justesse en plusieurs points de cette étendue (chapitre 6 et 8).

Figure 7.11 : Exemple d'estimation d'erreur de justesse



ETUDE DE LA JUSTESSE LOCALE ΔJ

Référence de l'appareil :	CIMG365	Opérateur :	Jean
Référence pièce :	MC014		*23/05/2008 19:31*
Valeur de l'étalon de référence	**3,000**	Référence étalon	E/M3CSL
Tolérance d'étalonnage à ±	**0,005**	Uniforme	Estimation σ_{Et} : 0,003

MESURES

2,980	2,990	2,990	2,990	3,000
3,010	3,000	3,020	3,030	3,030
3,000	3,010	3,020	2,980	3,010

Nombre de mesures effectuées	15	**Moyenne des mesures** $\bar{X}$:	3,004
Ecart-type estimé (mesures) :	0,016	**Ecart-type estimé** $s_{Moyenne}$:	0,004

ΔJ estimée : Moyenne des mesures - Valeur de l'étalon = δ	0,0040	*Bias*
Ecart-type estimé sur Δ_J :	0,0051	

ENCADREMENT DE ΔJ
(Loi de Student)

Degrés de liberté	14	**Risque α**	5%

Prob [-0,007 **< ΔJ <** 0,015 **] =** 95,0%

Le biais est acceptable si la valeur 0 est dans l'intervalle de confiance (habituellement pris à 95%)

Si non, vérifier l'étalon et l'appareil (éventuellement envisager de faire des corrections : mesure brute ==> mesure corrigée)

Capabilité du processus de contrôle : *approche inertielle*

Dans la validation des processus de contrôle, l'approche classique consiste, soit à valider de façon séparée la justesse et la fidélité, soit simplement à additionner les variances de ces deux éléments. La proposition du ndc_I est une approche permettant de donner plus de cohérence aux deux études de fidélité et de justesse en se fixant une limite qui dépend de la combinaison de ces deux éléments (illustration en figure 7.12).

Rappel sur les contraintes relatives aux dispersions

Si pour le choix du moyen de production, on retient un indicateur *Cp* qui doit être supérieur à 4/3, cela donne :

$$Cp = \frac{IT_{Client}}{6 \cdot \sigma_{PV}} \geq \frac{4}{3}$$

soit :

$$\sigma_{PV} \leq \frac{IT_{Client}}{8}$$

Si l'on retient un indicateur « *ndc* », supérieur ou égal à 5, cela donne :

$$\sigma_{GRR} \leq \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \sigma_{PV}$$

En combinant ces inéquations, nous obtenons une valeur seuil pouvant être utilisée directement en contrôle de réception :

$$\sigma_{GRR} \leq \frac{\sqrt{2}}{40} \cdot IT_{Client} \approx \frac{IT_{Client}}{28}$$

Influence du décentrage

La qualité livrée au client est caractérisée par sa dispersion σ_{PV} et par un décentrage δ_P. En réalité, l'estimation de la qualité intrinsèque est perturbée par le processus de contrôle entraînant une dispersion et un décalage parasites. Cette identification globale de la qualité est quantifiée par :

$$\sigma_{TV} = \sqrt{\sigma_{PV}^2 + \sigma_{GRR}^2}$$
$$\delta_T = \delta_P + \delta_G$$

Nous ne chercherons pas à limiter ces deux caractéristiques séparément (dispersion et décentrage) mais globalement. Le concept de tolérance inertielle nous permettra une analyse permettant des compensations entre ces deux composantes.

Tolérancement inertiel

Le *tolérancement inertiel*[1] a comme principe de vérifier qu'une sortie Y (pour un lot de k produits) présente une dispersion acceptable en regard de l'écart systématique constaté par rapport à la cible. Ces deux caractères (dispersion résiduelle et écart par rapport à la cible) peuvent être représentés comme les composantes d'un pseudo-vecteur :

$$\vec{I}\left|\begin{matrix}\sigma \\ \delta\end{matrix}\right.$$

Le seuil de conformité sur la sortie Y permet des compensations entre ces deux caractères (sous forme de lien). Par exemple, une faible dispersion permet de compenser un écart systématique par rapport à la cible Y_0.

Le lien entre ces deux caractères correspond à la norme $\|\ \|_2$ appliquée à $\vec{I}$.

1. Pillet M., « Inertial Tolerancing », *The Total Quality Management Magazine*, vol. 16, n° 3, mai 2004, p. 202-209.

Nous appellerons cette norme « inertie » et la noterons *I*. La décision de conformité pour la sortie *Y* sera donnée si :

$$\sqrt{\sigma^2 + \delta^2} \leq I_{Max}$$

Sauf mention particulière du client, l'inertie maximum sera déduite de la tolérance classique par :

$$I_{Max} = \frac{Tol}{6}$$

Dans le cas contraire, cela suppose que le client a attribué à chaque composante de définition une inertie spécifique que devra respecter le fabricant.

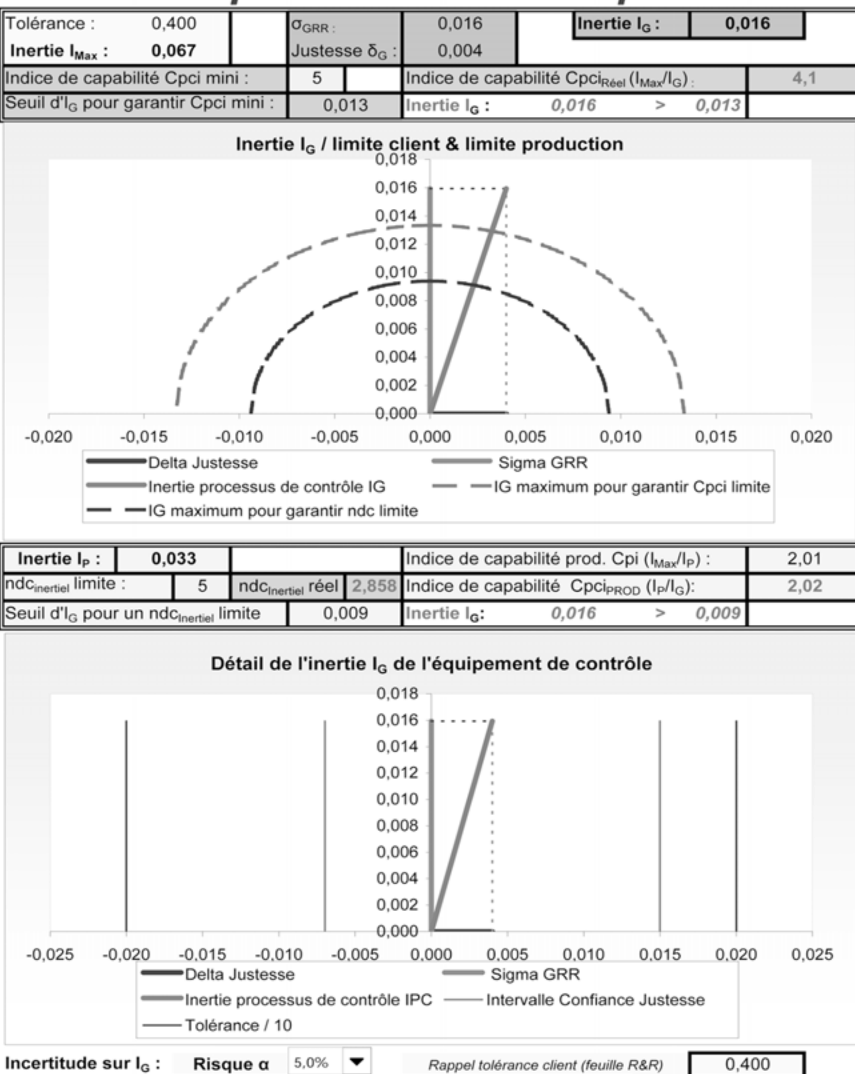
Indice de capabilité *Cpi*

Par analogie avec l'indicateur *Cp*, il est possible de définir un nouvel indicateur :

$$Cpi = \frac{I_{Max}}{\sqrt{\sigma_{PV}^2 + \delta_P^2}}$$

En réalité, l'indicateur évalué est égal à : $Cpi_{Obs} = \frac{I_{Max}}{\sqrt{\sigma_{TV}^2 + \delta_T^2}}$

Figure 7.12 : Indicateurs de capabilité inertielle



Incertitude sur I_G :	Risque α	5,0%		*Rappel tolérance client (feuille R&R)*	0,400
Justesse δ_G :	-0,007	<	**0,004**	<	0,015
Incertitude σ_{RR}	0,012	<	**0,016**	<	0,057
Incertitude I_G	0,014	<	**0,016**	<	0,059

Couplage inertie du processus de contrôle et inertie du processus de production

L'inertie résultante vectorielle $\overrightarrow{I_T}$ est la combinaison de l'inertie vectorielle de production $\overrightarrow{I_P}$ et de l'inertie vectorielle de contrôle $\overrightarrow{I_G}$.

Loi inter ne

L'ensemble des inerties vectorielles est muni d'une loi de composition interne, qui appliquée aux inerties vectorielles précédentes, donne :

$$\overrightarrow{I_T} = \overrightarrow{I_P} \oplus \overrightarrow{I_G}$$

soit au niveau des composantes :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_T = \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_G^2} \\ \delta_T = \delta_P + \delta_G \end{array} \right.$$

L'inertie résultante, combinaison des deux processus (production et mesure), est égale à :

$$I_T = \sqrt{\left(\sigma_P^2 + \sigma_G^2\right) + \left(\delta_P + \delta_G\right)^2}$$

$$I_T = \sqrt{\left(I_P^2 + I_G^2\right) + 2 \cdot \delta_P \cdot \delta_G}$$

Influence des décalages

L'équation précédente ne peut pas se réduire à la loi classique :

$$I_T^2 = \sum_i I_i^2$$

car les sources de variabilité n'étant qu'au nombre de deux, il n'y a pas d'effet de compensation *a priori*.

- δ_G sera estimé par une analyse de la justesse du processus de contrôle. Cela nécessite l'emploi d'un étalon voisin des pièces de la production.
- δ_P sera estimé indirectement à partir des observations d'un journal de bord d'un pilotage par SPC nous donnant le décalage résultant δ_T instantané.

Nous obtenons la relation :

$$I_T^2 = I_P^2 + I_G^2 + 2 \cdot \left(\delta_T - \delta_G\right) \cdot \delta_G$$

« *ndc* » inertiel

Suivant l'importance de la part de variabilité due au processus de contrôle par rapport à la variabilité totale, nous avions défini un indicateur « *ndc* » à partir d'un ratio *DR*. Par analogie, ce calcul de ratio peut s'appliquer aux inerties de ces deux processus. Il peut varier, de même, de un à l'infini :

$$DR_I = \sqrt{\frac{1+\frac{I_P^2}{I_T^2}}{1-\frac{I_P^2}{I_T^2}}} = \sqrt{\frac{I_T^2+I_P^2}{I_T^2-I_P^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot I_P^2+I_G^2+2\cdot\delta_P\cdot\delta_G}{I_G^2+2\cdot\delta_P\cdot\delta_G}}$$

$$DR = \sqrt{\frac{2\cdot I_P^2}{I_G^2+2\cdot\delta_P\cdot\delta_G}+1} = \sqrt{ndc_I^2+1}$$

$$ndc_I = \sqrt{2}\cdot\frac{I_P}{\sqrt{I_G^2+2\cdot\delta_P\cdot\delta_G}}$$

Comme δ_P n'est pas directement mesuré, nous retiendrons la formule pratique suivante :

$$ndc_I = \sqrt{2}\cdot\frac{I_P}{\sqrt{I_G^2+2\cdot\left(\delta_T-\delta_G\right)\cdot\delta_G}}$$

Remarquons que :

$$ndc_I \xrightarrow[\delta_P\to 0]{} \sqrt{2}\cdot\frac{I_P}{I_G}$$

Partant du principe qu'un pilotage permet de faire tendre vers zéro δ_P nous poserons que :

$$\sqrt{2}\cdot\frac{I_P}{I_G} \geq ndc_I \text{ limite}$$

En résumé, avec l'hypothèse d'un δ_P tendant vers 0 (c'est-à-dire $\delta_T = \delta_G$), il faut choisir un processus de contrôle dont la valeur I_G, relativement à l'inertie de production I_P, respecte la règle suivante :

$$I_G \leq \frac{\sqrt{2}}{ndc_I\text{limite}}\cdot I_P$$

- I_G est déterminé suite à l'analyse de la « répétabilité-reproductibilité » du processus de contrôle qui nous permet de calculer σ_{GRR} [*MSA 2002*] et d'une étude de justesse donnant l'estimation δ_G.
- I_P est obtenu par comparaison de l'inertie globale I_T, déterminée à partir de l'analyse *MSP* et de l'inertie du processus de contrôle I_G.

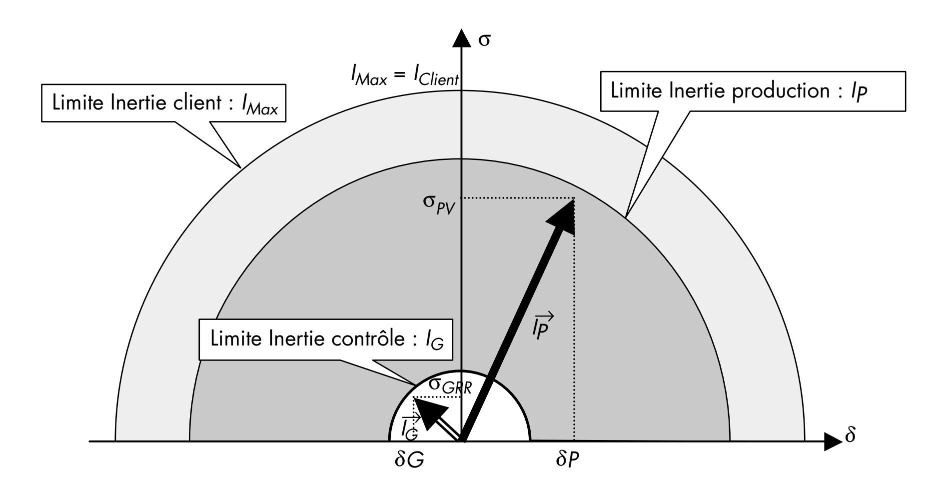
Si l'on veut comparer directement I_G à I_T, nous obtenons :

$$I_G \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(ndc_I \text{limite}\right)^2 + 2}} \cdot I_T$$

soit par exemple pour un ndc_I limite de 5, cela donne sensiblement la contrainte suivante :

$$I_G \leq \frac{1}{4} \cdot I_T$$

Figure 7.13 : Illustration graphique avec exemples des inerties I_P et I_G



Chapitre 8

Estimer l’incertitude de mesure

Rappelons qu'une mesure sert à prendre une décision. Cela peut servir :

- à décréter la conformité d'un produit (par rapport aux exigences du client) ;
- à valider un processus (capabilité, performance, pilotage, sécurité, développement durable, etc.).

Cette mesure a comme objectif d'être le reflet de la qualité réalisée. Malheureusement, le processus de mesure va donner une image perturbée (ou bruitée) de la qualité réellement produite. Pour prendre une décision à bon escient, il faut que l'on soit conscient de cette perturbation. Pour cela, on cherchera à définir une zone liée à la mesure réalisée, où la valeur vraie (jamais connue par définition) à de grandes chances d'être située. C'est le concept même d'incertitude.

Le métrologue doit gérer son processus de contrôle comme un fournisseur (de prestation). Il doit situer sa performance par rapport aux exigences de mesure de son client. On retrouve la notion classique d'indicateur de capabilité (voir chapitre 7).

Nous nous contenterons dans ce chapitre d'étudier des incertitudes sur des mesures simples nécessitant des corrections d'influence (influence de la température par exemple) ou sur des mesures indirectes à partir de grandeur de base (comme la mesure d'une masse volumique).

Pour estimer cette incertitude, nous nous appuierons sur une approche statistique de la mesure. La mesure résultante sera modélisée suivant la démarche proposée par le GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*). Cette démarche, initialisée par le Bureau international des poids et mesures et pouvant être appliquée à de multiples secteurs d'activités, a été retenue par de nombreuses instances nationales de métrologie. Ce guide est proposé comme norme française sous la référence : **NF ENV 13005 août 1999, Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure** – Indice de classement : X07-020.

Pour approfondir l'approche statistique de la mesure, on pourra se reporter entre autres, aux normes suivantes :

NF ISO 3534-1 Janvier 2007 – Statistique – Vocabulaire et symboles – Partie 1 : Termes statistiques généraux et termes utilisés en calcul des probabilités.

ISO/TS 21748 Mars 2004 – Lignes directrices relatives à l'utilisation d'estimations de la répétabilité, de la reproductibilité et de justesse dans l'évaluation de l'incertitude de mesure.

NF ISO 5725-1 Décembre 1994 – Application de la statistique – Exactitude (justesse et fidélité) des résultats et méthodes de mesure – Partie 1 : Principes généraux et définitions.

NF ISO 5725-2 Décembre 1994 – Application de la statistique – Exactitude (justesse et fidélité) des résultats et méthodes de mesure – Partie 2 : Méthode de base pour la détermination de la répétabilité et de la reproductibilité d'une méthode de mesure normalisée.

NF X07-001 Décembre 1994 – Normes fondamentales – *Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie*.

FD X07-021 Octobre 1999 – Normes fondamentales – Métrologie et applications de la statistique – Aide à la démarche pour l'estimation et l'utilisation de l'incertitude des mesures et des résultats d'essais.

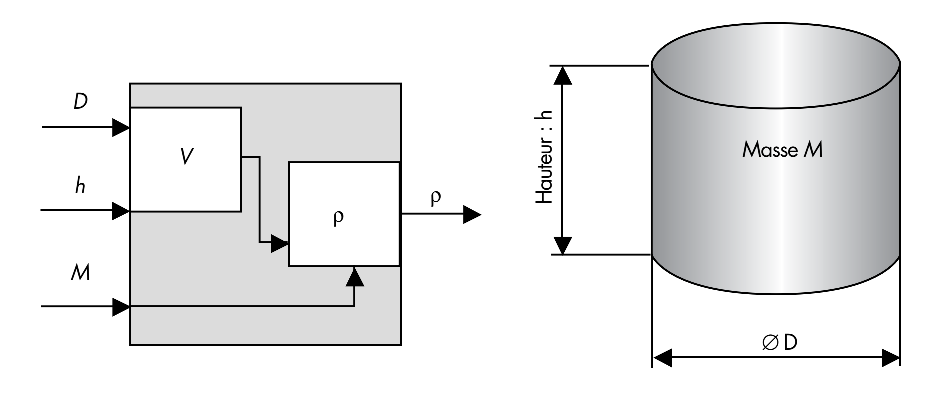
FD X07-022 Décembre 2004 – Métrologie et applications de la statistique – Utilisation des incertitudes de mesures : présentation de quelques cas et pratiques usuelles.

Présentation de la méthode du GUM

Exemple conducteur

Pour donner un aperçu de la méthode, nous retiendrons comme exemple conducteur la mesure indirecte de la masse volumique d'un cylindre. Partant de grandeurs de base (longueurs et masse), avec des hypothèses simplificatrices (en considérant le volume comme un cylindre de révolution parfait), nous allons calculer la masse volumique ρ (modélisation de la sortie en fonction des entrées). Nous rappellerons les formules génériques et leurs applications à cet exemple (fig. 8.1).

Figure 8.1 : Exemple conducteur : mesure d'une masse volumique



Modélisation du processus de mesure

C'est un des points les plus délicats. Il faut recenser les variables de base (X_i) permettant de calculer la variable finale (Y) et proposer un modèle (en essayant d'être le plus exhaustif possible). On pourra s'aider d'une démarche 5M ou de la liste publiée dans le GUM.

- Écriture générique : $Y = f(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n)$
- Application : $$\left| \begin{array}{l} \rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\pi \cdot \dfrac{D^2}{4} \cdot h} \\ \\ \rho = \dfrac{4}{\pi} \cdot M \cdot D^{-2} \cdot h^{-1} \end{array} \right.$$

Variables de bases cachées

Dans l'exemple précédent, avec la formule retenue, nous n'avons pas pris en compte l'influence de la température. Si son influence n'est pas directement modélisée dans la formule donnant ρ, de fait elle sera implicitement prise en compte dans les paramètres dimensionnels (D et h) sous réserve d'être en conditions de reproductibilité. Ce type de variable engendre de la covariance entre les variables identifiées.

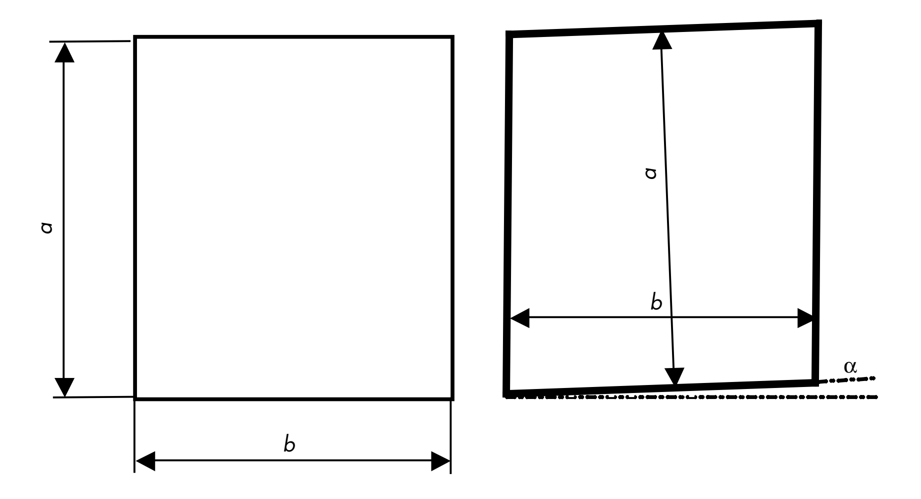
> ***Note sur les constantes mathématiques :*** *π est une constante mathématique (*a priori* invariable). Pour calculer les incertitudes, nous ferons de l'analyse numérique où π ne sera pas exactement connue (simplement*

estimée par une valeur décimale). En toute rigueur, cette définition incomplète engendre de l'incertitude. Nous négligerons, dans les exemples suivants, cette part d'incertitude (ordre considéré comme supérieur).

Variables de bases ignorées

Il s'agit de variables ayant une influence sur le résultat final de mesure, mais qui n'interviennent pas implicitement dans les autres variables de bases recensées. Bien qu'influentes, elles peuvent être complètement ignorées du métrologue et fausser son estimation. Nous en donnerons un exemple simple en mesurant la surface d'une tôle rectangulaire à l'aide des dimensions de base (*a* et *b*), en ignorant le défaut de perpendicularité α (fig. 8.2).

Figure 8.2 : Exemple de variable ignorée : α



Le modèle simple donne : $S = a \cdot b$.

alors que nous avons en réalité (α est infiniment petit du premier ordre) :

$$S = \frac{a \cdot b}{\cos \alpha} \approx \frac{a \cdot b}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \approx a \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

La mesure du même mesurande, par des méthodes différentes, peut permettre de « démasquer » ce genre de variables.

Loi de propagation de l'incertitude

Le modèle $Y = f(X_1, X_2, ...X_n)$ permet d'obtenir une estimation y de Y à partir des estimations de base (entrées) $x_1, x_2 \ldots x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, ...x_n)$$

La qualité finale de l'estimation y va dépendre de la variabilité rencontrée sur les estimations x_i.

Le paramètre caractérisant la variabilité dans l'estimation de X_i, est appelé *incertitude type*, il sera noté $u(x_i)$. Mathématiquement, il représente l'écart-type σ_i (la lettre u, comme « *uncertainty* », permet de se démarquer de la dispersion de production).

Le GUM retient deux approches pour quantifier les incertitudes types de base (évaluation de *type A* ou de *type B*). Nous reviendrons plus en détail sur ces deux types d'évaluation.

L'incertitude composée est donnée par l'équation suivante (obtenue à partir du développement de f autour des moyennes des x_i en série de Taylor du premier ordre) :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2(x_i)\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot u(x_i, x_j)\right)$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *coefficient de sensibilité* par rapport à la variable x_i, se lit « *d* rond f sur *d* rond x_i ». Il correspond à la dérivée partielle de f par rapport à la variable X_i au voisinage de la valeur x_i. Cette dérivée se calcule comme pour une dérivation classique, il suffit de considérer les autres variables comme des constantes pendant l'opération de dérivation ;
- $u(x_i)$ est l'incertitude type de la variable x_i (écart-type), $u^2(x_i)$ correspond à la variance ;
- $u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$ est la covariance des variables x_i,x_j (attention aux unités).

Il est souvent plus pratique de présenter l'équation précédente sous la forme suivante :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2(x_i)\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot r(x_i,x_j)\cdot u(x_i)\cdot u(x_j)\right)$$

Rappels

$u(x_i,x_j)$ = Cov (x_i,x_j) = E$(x_i y_j)$ – E(x_i).E(x_j) = $\overline{x_i x_j} - \overline{x_i} \bullet \overline{x_j}$

avec E(x_i) : espérance mathématique de la variable aléatoire x_i.

$u^2(x_i) = u\ (x_i, x_i)$ = Var (x) = E(x^2) – (E(x))^2 = $\overline{x_i^2} - \left(\overline{x_i}\right)^2$

Coefficient de corrélation : $r(x_i,x_j) = u(x_i,x_j)/u(x_i)\ u(x_j) = \dfrac{Cov(x_i,x_j)}{\sigma_{x_i} \bullet \sigma_{x_j}}$

Lorsque les variables ne sont pas corrélées ($r = 0$), l'incertitude composée se calcule comme suit :

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \cdot u^2(x_i)\right)$$

Cette formulation est beaucoup plus simple. Il ne faut l'utiliser que lorsque l'on a vérifié que les covariances sont nulles (ou au moins que l'on a de fortes présomptions).

Application au calcul de la masse volumique ρ :

$$u_c^2(\rho) = \left[\frac{\partial\rho}{\partial M}\right]^2 \cdot u^2(M) + \left[\frac{\partial\rho}{\partial D}\right]^2 \cdot u^2(D) + \left[\frac{\partial\rho}{\partial h}\right]^2 \cdot u^2(h)$$
$$+2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial M}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial D}\cdot r(M,D)\cdot u(M)\cdot u(D)$$
$$+2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial M}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial h}\cdot r(M,h)\cdot u(M)\cdot u(h)$$
$$+2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial h}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial D}\cdot r(h,D)\cdot u(h)\cdot u(D)$$

Si l'on fait l'hypothèse que la masse (choix de la matière) est complètement indépendante du volume, on peut admettre que $r(M,D)$ et $r(M,h)$ sont nuls. L'expression précédente se simplifie fortement :

$$u_c^2(\rho) = \left[\frac{\partial \rho}{\partial M}\right]^2 \cdot u^2(M) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial D}\right]^2 \cdot u^2(D) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial h}\right]^2 \cdot u^2(h) + 2 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial h} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial D} \cdot r(h,D) \cdot u(h) \cdot u(D)$$

Exemple

Pour un cylindre en alliage d'aluminium, on a fait cinquante mesures de *M*, *D* et *h*. Les triplets de mesures (*M*, *D* et *h*) sont mesurés successivement sur un temps relativement court (répétition) à 20 °C. On a estimé ensuite, avec une variation de température de l'ordre de 18 °C à 26 °C, les mesures corrigées que l'on aurait eues dans des conditions de reproductibilité (tableau 8.1).

Tableau 8.1 : Mesure des paramètres avec et sans influence de la température

	Masse M	D ($\theta = 20$ °C)	h ($\theta = 20$ °C)	ρ ($\theta = 20$ °C)	D ($\theta \neq 20$ °C)	h ($\theta \neq 20$ °C)	ρ ($\theta \neq 20$ °C)
$\bar{x}$ (g/mm³)	992.1656	80.0083	70.0088	0.0028	80.0117	70.0118	0.0028
S (g/mm³)	0.0975	0.0049	0.0051	4.81E-07	0.0065	0.0048	5.84E-07

Si l'on mesure à température constante, l'influence de la température sera négligée. Elle n'introduira pas de covariance entre *D* et *h* (fig. 8.3). Nous retiendrons la formule simplifiée suivante :

$$u_c^2(\rho) = \left[\frac{\partial \rho}{\partial M}\right]^2 \cdot u^2(M) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial D}\right]^2 \cdot u^2(D) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial h}\right]^2 \cdot u^2(h)$$

soit :

$$u_c^2(\rho) = \left[\frac{4}{\pi \cdot D^2 \cdot h}\right]^2 \cdot u^2(M) + \left[-\frac{8 \cdot M}{\pi \cdot D^3 \cdot h}\right]^2 \cdot u^2(D) + \left[-\frac{4 \cdot M}{\pi \cdot D^2 \cdot h^2}\right]^2 \cdot u^2(h)$$

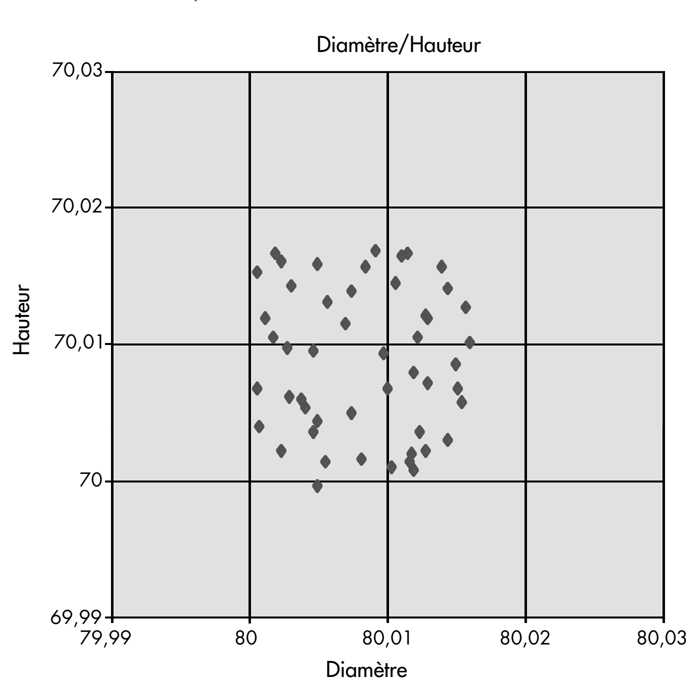
À l'aide des valeurs moyennes des variables, on obtient :

$$u_c^2(\rho) = 8.072\text{E-}12 \bullet 9.510\text{E-}03 + 4.965\text{E-}09 \bullet 2.390\text{E-}05 + 1.621\text{E-}09 \bullet 2.617\text{E-}05$$

$$u_c^2(\rho) = 2.378\text{E-}13$$

$$u_c(\rho) = 4.88\text{E-}07 \text{g/mm}^3$$

Figure 8.3 : Distribution des couples (D et h) en fonction du temps à température constante de 20 °C



Si l'on fait le même type d'étude, avec variation de la température, sans tenir compte de la covariance entre *D* et *h*, nous obtenons :

$$u_c^2(\rho) = 8.070\text{E-}12 \bullet 9.510\text{E-}03 + 4.963\text{E-}09 \bullet 4.195\text{E-}05 + 1.621\text{E-}09 \bullet 2.276\text{E-}05$$

$$u_c^2(\rho) = 3.218\text{E-}13$$

$$u_c(\rho) = 5.67\text{E-}07 \text{g/mm}^3$$

Or, à l'examen de la répartition des couples (*D* et *h*) mesurés à des températures différentes, on subodore une légère corrélation (fig. 8.4).

Figure 8.4 : Distribution des couples (D et *h*) en fonction du temps avec variation de la température

En tenant compte de la covariance, nous obtenons :

$$u_c^2(\rho)=\left[\frac{\partial\rho}{\partial M}\right]^2\cdot u^2(M)+\left[\frac{\partial\rho}{\partial D}\right]^2\cdot u^2(D)+\left[\frac{\partial\rho}{\partial h}\right]^2\cdot u^2(h)+2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial h}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial D}\cdot Cov(h,D)$$

$$u_c^2(\rho)=\left[\frac{4}{\pi\cdot D^2\cdot h}\right]^2\cdot u^2(M)+\left[-\frac{8\cdot M}{\pi\cdot D^3\cdot h}\right]^2\cdot u^2(D)+\left[-\frac{4\cdot M}{\pi\cdot D^2\cdot h^2}\right]^2\cdot u^2(h)$$
$$+2\cdot\left(-\frac{4\cdot M}{\pi\cdot D^2\cdot h^2}\right)\cdot\left(-\frac{8\cdot M}{\pi\cdot D^3\cdot h}\right)\cdot Cov(D,h)$$

soit pour cet exemple :

$$u_c^2(\rho)=8.072\text{E-}12\bullet 9.510\text{E-}03+4.965\text{E-}09\bullet 2.390\text{E-}05+1.621\text{E-}09\bullet 2.617\text{E-}05$$
$$+5.672\text{E-}09\bullet 4.866\text{E-}06$$

$$u_c^2(\rho)=3.494\text{E-}13$$

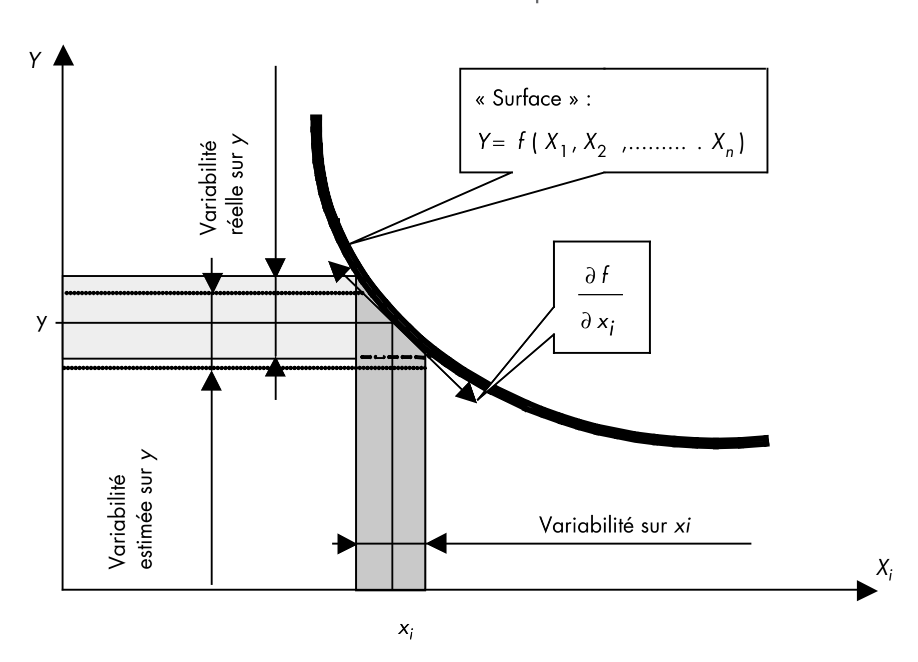
$$u_c(\rho)=5.91\text{E-}07\text{g/mm}^3$$

Note : *il est parfois plus simple de traiter la covariance que de définir une relation fonctionnelle plus complexe (par exemple, retenir comme variables supplémentaires la température et le coefficient de dilatation du matériau).*

Risque dû au développement limité au premier ordre

On peut remarquer de légères différences entre les valeurs calculées et les valeurs estimées par échantillonnage. Ceci est particulièrement vrai lorsque la réponse Y n'est pas une fonction linéaire des entrées X_i (fig. 8.5). Dans un cas de forte non-linéarité, il faut envisager un développement de Taylor au deuxième ordre. De toute évidence, si la variabilité sur les entrées est forte, il faut rester prudent.

Figure 8.5 : Influence de la non-linéarité sur l'estimation de l'incertitude composée



Quantifier les incertitudes types $u(x_i)$: évaluation de *type A* ou de *type B*

Le GUM retient deux modes d'évaluation des incertitudes types $u(x_i)$, à savoir le *type A* et le *type B*.

Évaluation de *type A*

Ce type est basé sur l'utilisation des techniques statistiques (variance expérimentale, variance de distribution des moyennes, etc.) (voir chapitre 6).

Pour un échantillon de n résultats de mesure, la moyenne arithmétique est le meilleur estimateur d'un nombre infini de mesures.

L'estimation de la moyenne μ_i du paramètre X_i est donnée par :

$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$. C'est la valeur à prendre en compte dans la formule $y = f(x_1, x_2, ...x_n)$ (voir exemple précédent sur la mesure de masse volumique).

L'estimation de l'écart-type expérimental est donnée par :

$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{X}_i)^2}$.

Si l'on dispose de plusieurs séries de mesures pour un même paramètre, avec pour chaque série une estimation s_{ik}, une meilleure estimation de la variance – sous réserve d'appartenance à une même population – sera donnée par :

$$s_i^2 = \frac{(n_1 - 1)s_{i1}^2 + (n_2 - 1)s_{i2}^2 + ... + (n_k - 1)s_{ik}^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + ... + (n_k - 1)}$$

L'incertitude type sur la moyenne $\bar{X}_i$ de l'échantillon est obtenue par :

$u^2\left(\bar{X}_i\right) = \frac{s_i^2}{n}$ (sous réserve d'indépendance des mesures x_{ij}).

Ce type d'évaluation est souvent préféré au *type B* (parfois à tort). Il faut rappeler que répéter la mesure permet de faire chuter l'incertitude type (au détriment du coût et du temps d'acquisition), que cette diminution varie en inverse de $\sqrt{n}$, c'est-à-dire que la chute est rapide uniquement au début (fig. 8.6).

s_i est une pauvre estimation de σ_i, il faut être assez prudent sur la pertinence de la valeur obtenue (chapitre 6).

$$\text{Prob}\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}} \bullet S_i \leq \sigma_i \leq \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}} \bullet S_i\right] = 1 - \alpha$$

soit :

$$\text{Prob}\left[k_{Inf}(\alpha/2, n) \bullet S_i \leq \sigma_i \leq k_{Sup}(\alpha/2, n) \bullet S_i\right] = 1 - \alpha$$

Pour une probabilité de 95 %, les bornes k_{Inf} et k_{Sup} sont représentées sur la figure 8.7 (en fonction de la taille de l'échantillon).

Figure 8.6 : Chute de l'incertitude type en fonction de *n*

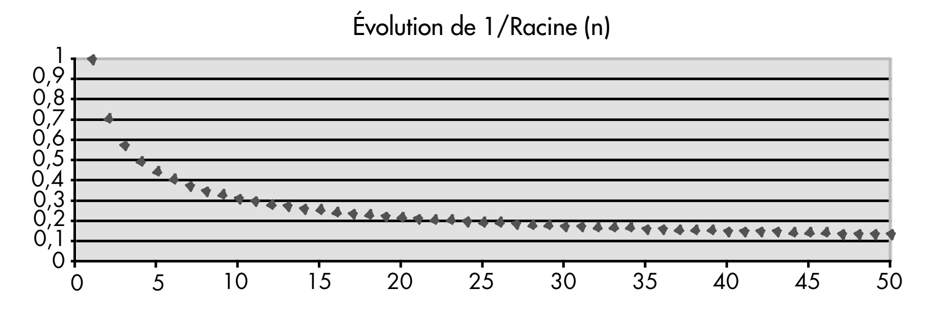
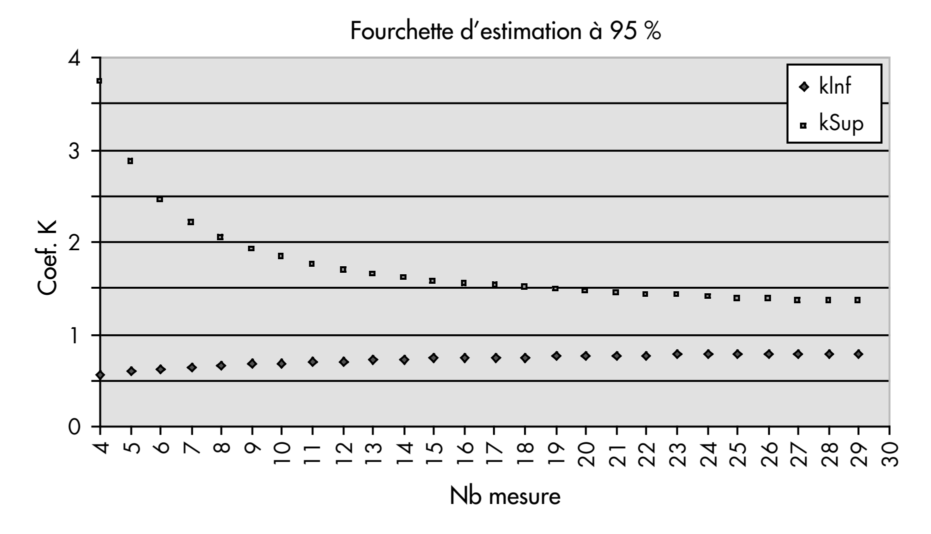


Figure 8.7 : Fourchette (coefficients) de l'estimation de σ_i



Évaluation de *type B*

Ces méthodes sont utilisées, soit lorsque l'outil statistique est d'utilisation difficile (trop onéreux ou destructif par exemple), soit parce que l'on pense bénéficier de meilleures estimations, provenant d'expertises internes ou externes. Ainsi, si l'on a une garantie sur la variable X_i (par exemple, certificat d'étalonnage donnant l'incertitude élargie), on peut estimer l'incertitude type (sous hypothèses de distribution) comme on le ferait à partir d'un intervalle de confiance.

Cette démarche nécessite une analyse de praticien. Elle peut faire appel à une expertise construite sur des observations (mémoire). Parfois, c'est

une information donnée par un tiers qui sera utilisée (certificat d'étalonnage, données constructeurs, valeurs encyclopédiques, etc.). Souvent, on se contente des lois de probabilité suivantes, représentées sur l'intervalle ± *a* (figure 8.8 graduée en *a*/3) :

- loi uniforme (ou loi rectangulaire) :

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot a} \qquad u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

  Cette loi est retenue lorsque l'on a peu d'information. Par exemple un certificat d'étalonnage nous garantit que la valeur X_i appartient à ± *a*, mais ne nous donne aucune information complémentaire sur la densité de probabilité *f*(*x*). Par défaut, toutes les valeurs internes seront considérées comme équiprobables ;
- loi normale (ou loi de Gauss) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad u(x) = \frac{a}{k}.$$

  Toutes les valeurs n'ont pas une probabilité de 100 % d'être comprises dans ± *a*, mais une probabilité qui dépend du choix de niveau de confiance ($1 - \alpha$) retenu (par exemple si $k = 3$, cela veut dire que la probabilité d'appartenance à ± *a* est de 99,73 %. Si $k = 2$, elle est voisine de 95 %). Cette loi est d'un usage fréquent, elle est bien appropriée lorsque les causes de variabilité sont nombreuses et du même ordre de grandeur (théorème central limite).

Il existe d'autres lois pouvant être retenues. Ce choix peut être guidé par l'analyse d'histogrammes avec l'appui de tests statistiques. Nous citerons simplement :

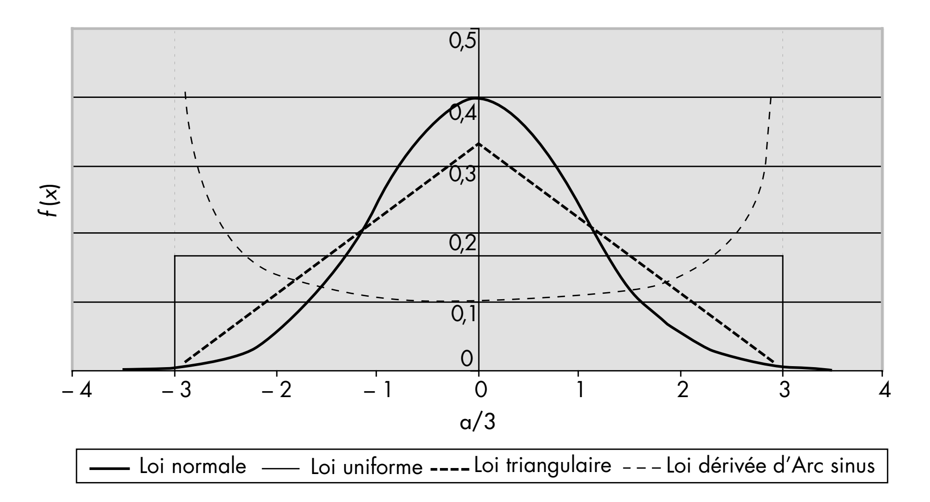
- *loi triangulaire* avec $u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}}$: comparée à la loi uniforme, on estime que la position moyenne est la plus probable. C'est un compromis des deux précédentes lois ;
- *loi en U (ou dérivée d'arc sinus*[1]*)* :

$$f(x) = \frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-b}{a}\right)^2}} \qquad u(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

1. *www.metgen.org.*

Cette loi est bien adaptée à une grandeur centrée sur b et pouvant évoluer entre $\pm a$ de façon sinusoïdale. On rencontre ce problème avec des variables asservies et présentant un problème de pompage (climatisation par exemple).

Figure 8.8 : Comparaison des quatre lois usuelles



Incertitude élargie

En statistique, on donne pour une grandeur étudiée, un intervalle de confiance ayant une certaine probabilité de contenir la valeur vraie (chapitre 6). Pour construire cet intervalle, on utilise généralement :

- une estimation donnée par la moyenne de n observations indépendantes ;
- un paramètre de variabilité (par exemple l'estimation de l'écart-type) ;
- une fonction de densité de probabilité $f(x)$ (par exemple, la loi normale).

Nous n'avons pas cette dernière information. Cependant, il est pratique de donner une mesure sous la forme :

$$\textit{Mesure} = \textit{Valeur estimée} \pm U$$

U est appelée « incertitude élargie » et calculée par : $U = k \cdot u_c(y)$.

Le passage de u_c à U ne donne pas de nouvelle information, car le coefficient k, appelé « facteur d'élargissement » est choisi arbitrairement[1]. Le plus souvent, par analogie avec le calcul de probabilité à l'aide de la loi normale, on retient : $2 \leq k \leq 3$.

Les indicateurs de capabilité d'un processus de production sont calculés à l'aide d'une dispersion définie à $6.\sigma$. Par souci de normalisation, sauf indications contraires, il paraît normal d'étendre cela à la mesure et de retenir $k = 3$.

Expression de l'incertitude : on peut soit donner l'estimation du mesurande et l'incertitude composée associée, soit donner l'estimation et l'incertitude élargie. Nous retiendrons la seconde solution, qui est plus dans l'esprit de la production. Il faut prendre garde de retenir la même résolution pour ces deux composantes.

> Exemple
>
> M = 99,166 g ± 0,095 g (k = 3)

Incertitude sur les corrections

Nous distinguerons deux types de correction :

- *une correction locale* pour un processus de mesure utilisé en série avec des mesurandes voisins (par exemple un lot de pièces usinées sur la même machine) ;
- *une correction globale*, applicable sur toute l'étendue de mesure de l'appareil (appareil d'emploi plus universel, comme un pied à coulisse).

1. Pour un calcul plus fin de *k*, le lecteur pourra consulter l'annexe G, « Degrés de liberté et niveau de confiance » de la norme NF ENV 13005 août 1999, Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure.

Correction locale

À partir d'une estimation (mesure brute), nous appliquerons diverses corrections pour obtenir une mesure corrigée (meilleure image du mesurande) :

Mesure corrigée = mesure brute + correction de justesse + correction de dérive + correction des facteurs d'influence + autres corrections…

Le plus souvent, ces corrections (supposées non corrélées) ne sont pas faites pour différentes raisons (ignorance des influences, complexité de modélisation, coût, qualification, etc.). Ne pas faire ces corrections ne veut pas dire qu'elles ne sont pas prises en compte, mais qu'elles ont été estimées dans un premier temps à la valeur « 0 ».

Mathématiquement, sous réserve d'indépendance des différentes corrections, on peut écrire :

$$M_{cor} = M_{brute} + \sum c_i$$
$$u_c^2(M_{cor}) = 1 \cdot u_{M_{brute}}^2 + \sum (1 \cdot u^2(c_i))$$

Correction locale de justesse

Pour faire une correction de justesse, il faut avoir une estimation de la différence entre la mesure et une valeur vraie.

***Rappels** (chapitre 7)* **:**

L'erreur de justesse est définie par :

$$\Delta J = \mu - X_0$$

- *μ correspond à la moyenne d'un nombre infini de mesures ;*
- *X_0 est la valeur de l'étalon (supposée vraie).*

En réalité, nous ne pouvons qu'estimer l'erreur de justesse par :

$$\delta J = \bar{x} - x_0$$

- *$\bar{x}$ est l'estimation de μ à l'aide des n valeurs de l'échantillon (l'incertitude associée est de type A) ;*
- *x_0 est la valeur donnée par le certificat d'étalonnage.*

La tolérance d'étalonnage permet de calculer l'incertitude associée à la valeur étalon (incertitude de type B).

L'incertitude sur ΔJ est caractérisée par :

$$\sigma^2_{\Delta J} = \frac{\sigma^2_{MesureEtalon}}{n} + \sigma^2_{Etalon}$$

et estimée par :

$$s^2_{\Delta J} = \frac{s^2_{MesureEtalon}}{n} + s^2_{Etalon}$$

Par exemple si le certificat d'étalonnage propose : $X_0 = x_0 \pm \tau_0$ *, on peut retenir avec l'hypothèse d'une distribution uniforme :*

$$s^2_{\Delta J} = \frac{s^2_{MesureEtalon}}{n} + \frac{\tau_0^2}{3}$$

L'erreur de justesse est estimée à δJ

Cela ne nécessite pas une courbe complète d'étalonnage, mais simplement une connaissance locale pour le voisinage de la valeur nominale du mesurande.

$$M_{cor} = M_{brute} - \delta_J$$
$$u_c^2(M_{cor}) = u^2_{M_{brute}} + s^2_{\Delta J}$$

L'erreur de justesse n'est pas connue

Dans ce cas, on fera de fait une correction nulle. Ce choix peut aussi être dicté par des considérations économiques et de rapidité d'acquisition. Si l'appareil a été vérifié (chapitre 3), cela veut dire que son défaut de justesse (inconnu de l'utilisateur courant) ne doit pas dépasser une valeur seuil maximum ($a = EMT$: écart maximum toléré).

$$-a \leq \Delta J \leq +a$$

La méconnaissance de l'erreur de justesse invite à la prudence. On retiendra comme fonction de densité de probabilité, une loi uniforme :

$$M_{cor} = M_{brute}$$
$$u_c^2(M_{cor}) = u^2_{M_{brute}} + \frac{a^2}{3}$$

Remarque *: il y a une grande similitude avec le concept d'inertie du processus de contrôle I_G (proposé au chapitre 7) :*

$$I_G = \sqrt{\sigma_{GRR}^2 + \delta_J^2}$$

I_G nécessite un étalonnage pour être quantifiée. Pour améliorer l'inertie I_G du processus de contrôle, on peut chercher à améliorer les deux composantes, en acceptant des compensations. Pour améliorer u_c, il faut en priorité intervenir sur l'incertitude de la méthode ou, en dernier recours, changer de classe d'appareil (réduire la valeur de a).

Correction locale de dérive

Ce cas est très proche du précédent, sauf qu'en plus, l'erreur de justesse est une fonction du temps. La solution la plus utilisée est d'essayer d'**éliminer** cette influence (voir chapitre 9). L'incertitude associée est contenue dans l'incertitude de justesse.

Correction locale de grandeurs d'influence

La méthode de traitement correspond à la méthode classique, où l'on cherchera autant que possible à soustraire les facteurs d'influence (sous forme de corrections algébriques c_i) dans la relation :

$$M_{cor} = M_{brute} - \delta_J + \sum_i c_i$$

$$u_c^2(M_{cor}) = u_{M_{brute}}^2 + s_{\Delta J}^2 + \sum_i s_i^2$$

À titre d'exemple, nous présentons la correction à faire lors d'une mesure directe avec un appareil qui n'est pas à la même température que la pièce fabriquée (fig. 8.9). En particulier, si la pièce vient d'être usinée, sa température interne peut-être nettement plus élevée que celle de l'appareil.

Figure 8.9 : Exemple de correction de température

Etude du milieu

Influence de la température — 23/05/2008 19:19

Pièce

Mesure brute de la pièce :	100,032	à ±	0,002	Modèle distribution :	Uniforme
				Incertitude u associée :	*0,001*
Coef dilatation λ_P en 10^{-6}/ K :	20	à ±	2	Modèle distribution :	Uniforme
				Incertitude u associée :	*1,155E-06*
Estimation θ_P température pièce :	25°	à ±	5°	Modèle distribution :	Triangulaire
				Incertitude u associée :	*2,041*

Appareil de mesure

Coef dilatation λ_A en 10^{-6}/ K :	4	à ±	1	Modèle distribution :	Uniforme
				Incertitude u associée :	*5,774E-07*
Estimation θ_A température appareil :	20°	à ±	1°	Modèle distribution :	En U
				Incertitude u associée :	*0,707*

Formules de base :

$$L_{P,\theta_P} = L_{A,\theta_A}$$

$$L_{P,20°} = \frac{L_{A,20°} \bullet \left[1+\lambda_A \cdot \left(\theta_A - 20°\right)\right]}{1+\lambda_P \cdot \left(\theta_P - 20°\right)}$$

$$L_{P,20°} = f(L_{A,20°}, \lambda_A, \theta_A, \lambda_P, \theta_P)$$

Note : "$L_{A,20°}$" est la valeur lue sur l'appareil (mesure brute). Pour θ_P et θ_A à 20°, la correction est nulle.

Valeur corrigée : 100,022 ± 0,013

Incertitude composée $u_c(L_P)$: 0,004 — facteur d'élargissement k : 3

estimée avec une hypothèse de covariance nulle entre les variables d'entrée.

$$\frac{\partial L_{P,20°}}{\partial L_{A,20°}} \bullet u_{L_{A,20°}} = 0{,}0012$$

$$\frac{\partial L_{P,20°}}{\partial \lambda_A} \bullet u_{\lambda_A} = 0{,}0000$$

$$\frac{\partial L_{P,20°}}{\partial \theta_A} \bullet u_{\theta_A} = 0{,}0003$$

$$\frac{\partial L_{P,20°}}{\partial \lambda_P} \bullet u_{\lambda_P} = 0{,}0006$$

$$\frac{\partial L_{P,20°}}{\partial \theta_P} \bullet u_{\theta_P} = 0{,}0041$$

Correction globale

L'appareil retenu couvre une étendue de mesure importante :
$X_i \in \left[x_{\text{inf}}, x_{\text{sup}} \right]$.

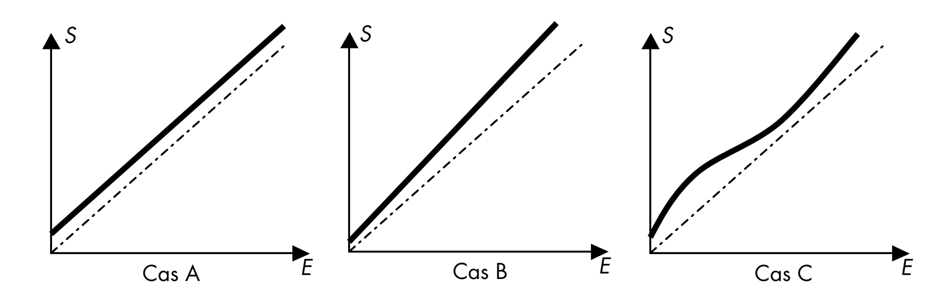
Par commodité de présentation, nous retiendrons $x_{inf} = 0$ (mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour un micromètre : 25-50 mm).

Prenons le cas d'un micromètre 0-25 mm. À l'aide de cales-étalons de classe 1, on compare la valeur fournie par l'appareil (x_{ij}) et la valeur correspondante lue sur la cale-étalon Y_{0i} (l'exactitude de cette valeur sera supposée grande par rapport aux indications fournies par l'appareil). Pour chaque groupe de k mesures x_{ij}, on calcule une estimation d'écart :

$$e(x_i) = \frac{1}{k} \sum_j x_{ij} - Y_{0i}$$

> ***Note :*** *nous utiliserons la présentation de C. Perruchet et M. Priel*[1] *qui conseillent de retenir la donnée de l'instrument comme grandeur d'entrée et comme grandeur de sortie la valeur de l'étalon correspondante. Cette présentation permet d'obtenir des régressions linéaires par la méthode des moindres carrés, l'entrée (valeur lue) n'étant pas une variable aléatoire (exemple figure 8.10).*

Figure 8.10 : Exemple d'erreurs de justesse par rapport à l'étendue



- Cas A : l'estimation de l'erreur de justesse est constante sur toute l'étendue (cas typique d'une lame d'air entre un marbre et une cale-étalon).
- Cas B : au défaut précédent, s'ajoute un défaut d'échelle (par exemple, le pas du micromètre est un peu fort).

- Cas C : cas le plus général, un défaut de linéarité vient se superposer aux deux précédents (variation non constante du pas de vis du micromètre).

> ***Remarque :*** *dans l'exemple précédent, nous avons considéré que la courbe S = f(E) est la même en charge ou en décharge. Il n'y a pas d'effet d'hystérésis.*

La représentation de la figure 8.10 est peu exploitable si l'on a une grande étendue relativement aux écarts estimés. Il est plus pratique de « redresser ce graphique » en représentant les écarts par rapport à la première bissectrice (appareil sans défaut). De plus, rappelons qu'il ne s'agit que d'estimations en nombre limité (fig. 8.11).

Figure 8.11 : Exemple d'erreur de justesse pour un micromètre

Incertitude associée à une correction nulle

Nous sommes dans le même cas que pour une justesse locale, son défaut de justesse (inconnu de l'utilisateur occasionnel) ne doit pas dépasser une valeur seuil maximum ($a = EMT$: écart maximum toléré), ceci quelle que soit la valeur d'entrée.

$$-a \leq \Delta J(X_i) \leq +a \qquad \forall X_i$$

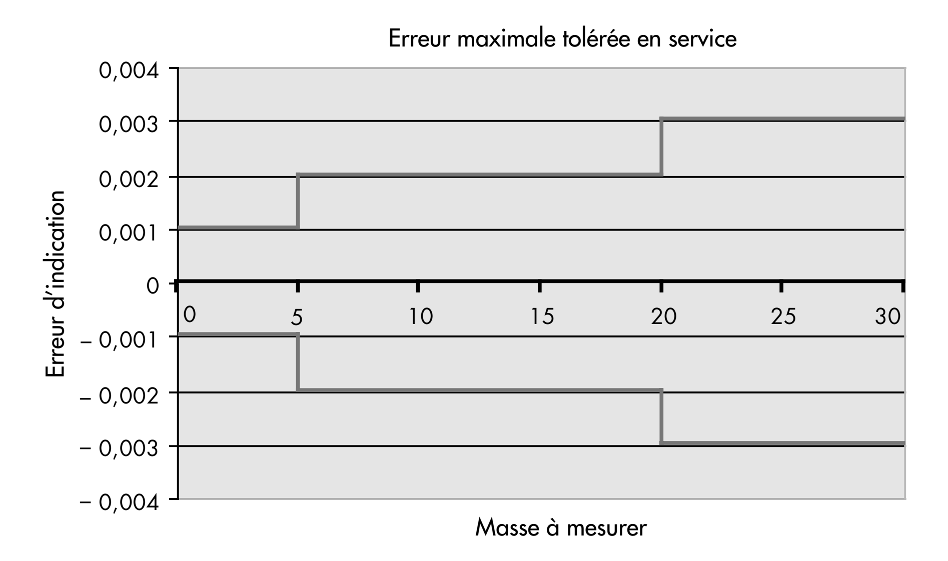
On retiendra comme fonction de densité de probabilité, une loi uniforme :

$$M_{cor}(X_i) = M_{brute}(X_i)$$

$$u_c^2(M_{cor}) = u^2_{M_{brute}(X_i)} + \frac{a^2}{3}$$

Parfois, le bornage ± a se fait plage par plage. On a des limites en « marches d'escalier » (par exemple, instrument de pesage[1] en figure 8.12).

Figure 8.12 : Exemple d'erreur tolérée en fonctionnement pour une balance de classe II d'étendue 30 kg



Incertitude associée à une correction spécifique à une valeur locale

Cela nécessite d'avoir la courbe d'étalonnage avec l'incertitude locale associée (suivant la position dans l'étendue, nous n'avons pas les mêmes valeurs) :

$$M_{cor} = M_{brute} - \delta_J(X_i)$$

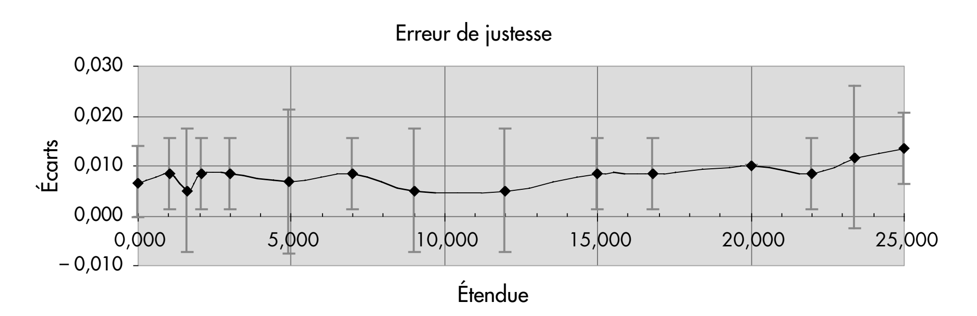
$$u_c^2(M_{cor}) = u_{M_{brute}}^2 + s_{\Delta J}^2(X_i)$$

Vu la faible taille des échantillons, on peut éventuellement retenir une incertitude constante pour toute l'étendue de mesure, calculée avec l'ensemble des valeurs.

1. NF EN 45501 novembre 1993, Aspects métrologiques des instruments de pesage à fonctionnement non automatique – Indice de classement : E12-000.

Bien que ce genre de courbe soit donnée avec chaque appareil, ce n'est pas d'un emploi pratique en production. Cette approche est plutôt réservée à la mesure en laboratoire.

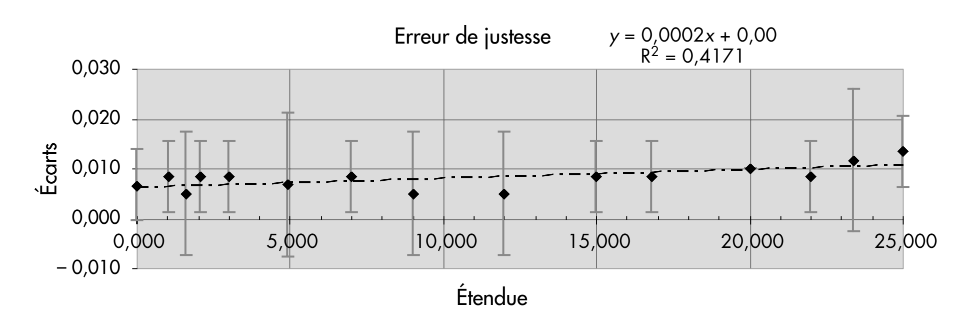
Figure 8.13 : Courbe d'étalonnage brute (non modélisée)



Incertitude associée à une correction modélisée

C'est un compromis entre les deux méthodes précédentes. La correction est modélisée, cela évite de mémoriser un nombre important de valeurs. Par exemple, si l'on retient un modèle linéaire, il suffit de mémoriser deux paramètres pour faire les corrections (fig. 8.14).

Figure 8.14 : Modélisation de la courbe d'étalonnage



Cette approche est d'une mise en œuvre pratique et facile (tableur). Néanmoins, il faut rester très prudent. Il ne faut pas oublier que ce n'est qu'un modèle et qu'il ne colle pas toujours parfaitement à la réalité. On peut choisir un modèle plus complexe, mais il demandera la mise en mémoire de plus de paramètres.

Dans l'exemple de la figure 8.14, la correction proposée est du type :

$$\delta_J = a \cdot X_i + b$$

a et *b* ne sont que des estimations des vrais paramètres α et β. L'incertitude va devenir importante dès que l'on s'éloigne de la valeur moyenne des X_i (à peu près le milieu de l'étendue). Cette incertitude nécessite d'estimer un écart-type des résidus $s_{\text{Résidus}}$ (voir chapitre 6). Nous pouvons proposer :

$$M_{cor} = M_{brute} - a \cdot X_i - b$$

$$u_c^2(M_{cor}) = u_{M_{brute}}^2 + s_{Résidus}^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_i - \bar{X} \right)^2}{n \cdot s_X^2} \right]$$

Chapitre 9

Maintenir la qualité métrologique

L'entreprise doit vérifier au cours du temps que la qualité de la mesure ne se dégrade pas. En cas de constat trop tardif de dérive excessive de l'appareil, il faut reprendre les mesures ayant permis de décréter à tort la conformité. Pour limiter ce risque, l'entreprise devra mettre en place et piloter un processus de surveillance pour certifier cette garantie de qualité. Il est tentant d'exiger une fréquence de surveillance élevée pour minimiser le risque client. Ce processus de surveillance nécessite des ressources matérielles et humaines et immobilise les appareils. Cela engendre des coûts supplémentaires qu'il faut mettre en regard avec les risques de non-détection (reprise des contrôles, rappels, etc.). Le choix de la fréquence de surveillance devra essayer de répondre à ce souci d'optimisation financière et de qualité. On commence souvent par une vérification à périodicité calendaire fixe, associée à un réajustage si nécessaire. Cela permet de voir comment se comportent les appareils. Avec plus d'expériences, on peut appliquer les méthodes employées en maîtrise statistique des procédés (MSP). En effet, il serait inutile et coûteux de réajuster systématiquement un appareil qui ne s'est pas déréglé (en fait où il n'y a pas confirmation de déréglage). Quelle que soit la stratégie retenue, elle doit être décrite dans une procédure précisant les méthodes utilisées pour déterminer ou modifier les intervalles de confirmation métrologique[1].

Il va de soi qu'un appareil qui aurait subi des problèmes de fonctionnement (mauvaise manipulation, chocs, surcharge, etc.) ne doit pas attendre la date prévue avant d'être vérifié à nouveau (certains appareils sont très sensibles aux déménagements et doivent être vérifiés systématiquement).

Rappelons qu'à l'issue de chaque vérification de conformité métrologique, l'appareil peut être :

- maintenu pour l'utilisation prévue (conforme) ;
- ajusté ou réparé et remis en service ;

1. NF EN ISO 10012 septembre 2003, Systèmes de management de la mesure – Exigences pour les processus et les équipements de mesure et FD X07-014 novembre 2006, Métrologie – Optimisation des intervalles de confirmation métrologique des équipements de mesure.

- déclassé (utilisation nécessitant une précision plus faible) ;
- mis au rebut.

Les deux derniers cas relèvent de la maîtrise de produits non conformes, ils doivent être clairement identifiés.

Correction de la dérive à périodicité calendaire fixe

Cette tradition de périodicité calendaire est héritée de la métrologie légale (vérification des balances commerciales, des pompes volumétriques à essence, etc.). Cet état d'esprit est passé naturellement de la métrologie légale à la métrologie industrielle. L'OIML (Organisation internationale de la métrologie légale) publie le document n° 10 : *ILAC – G24/OIML D10 : Conseils pour la détermination des intervalles de réétalonnage des équipements de mesure utilisés dans les laboratoires d'essais*[1]. Ce document retient cinq méthodes de révision des intervalles de vérification :

- **méthode 1 :** ajustement automatique en escalier (inspirée des cartes *CUSUM*, on reporte sur un graphique une augmentation si l'on dépasse la valeur tolérée ou une diminution dans le cas contraire) ;
- **méthode 2 :** utilisation des cartes de contrôles de la MSP (cette méthode permet d'appréhender les dérives, lentes ou rapides). Elle est bien adaptée pour les entreprises maîtrisant ces outils de contrôle de la qualité par les statistiques (nous reviendrons sur cette méthode au paragraphe 2) ;
- **méthode 3 :** on reprend les principes précédents mais en se basant sur une durée réelle d'utilisation. Cela nécessite un système ou une technique de mesure du temps de fonctionnement. Cette méthode n'est pas forcément judicieuse lorsque les cycles de fonctionnement sont très courts ;
- **méthode 4 :** utilisation systématique d'une pré-vérification (appelée test « boîte noire »). Bien adaptée aux instruments complexes, cette méthode propose à chaque mise en route une vérification intégrée

1. Téléchargeable sur le site : *www.oiml.org/publications/D/D010-e07.pdf.*

simplifiée qui tire la sonnette d'alarme en cas de soupçon de dérive importante exigeant un complément de vérification (maintenance prédictive). Il faut que la pré-vérification soit potentiellement sensible à toutes les causes de dérives possibles ;

- **méthode 5 :** approches statistiques basées sur les observations d'un grand nombre d'instruments.

Choix arbitraire d'initialisation de la périodicité

L'empirisme est souvent de règle au début pour choisir la période de correction (par exemple une période de six mois, recommandation du fournisseur d'appareils…). Elle est affinée suite aux constats de dérive ou non lors des vérifications. On peut diminuer la fréquence si les enregistrements indiquent des dérives inexistantes ou lentes.

La périodicité des ajustages (si nécessaire) est fonction entre autres :

- **du degré d'exactitude souhaité :** en général les appareils de basse résolution (comme un réglet) dérivent peu et nécessitent moins d'attention. On peut accepter une **incertitude** de l'équipement plus importante ;
- **du taux d'utilisation :** certains appareils sont très spécifiques (comme des piges de contrôle), ils peuvent rester plus ou moins longtemps sans être utilisés. On peut ne faire démarrer la période d'utilisation qu'à partir de la date de mise en service, sous réserve que cette dernière soit bien identifiée (pige recouverte de cire par exemple) ;
- **de l'environnement d'utilisation :** si l'instrument est utilisé dans un environnement difficile (chaleur, vibrations, etc.), il est évident qu'il faudra réduire la période de vérification, de même si le nombre d'opérateurs utilisant l'appareil est important. Lorsqu'il n'y a qu'un seul opérateur expérimenté et soigneux, cela crée un sentiment d'appartenance bénéfique pour l'appareil ;
- **de l'aptitude à dériver des appareils :** par exemple des équerres utilisées en mécano-soudage peuvent être vérifiées seulement tous les trois ans (sauf accident d'utilisation) ; *a contrario* certains appareils peuvent présenter des dérives rapides et nécessiter des vérifications quotidiennes (processus d'équilibrage par exemple) ;

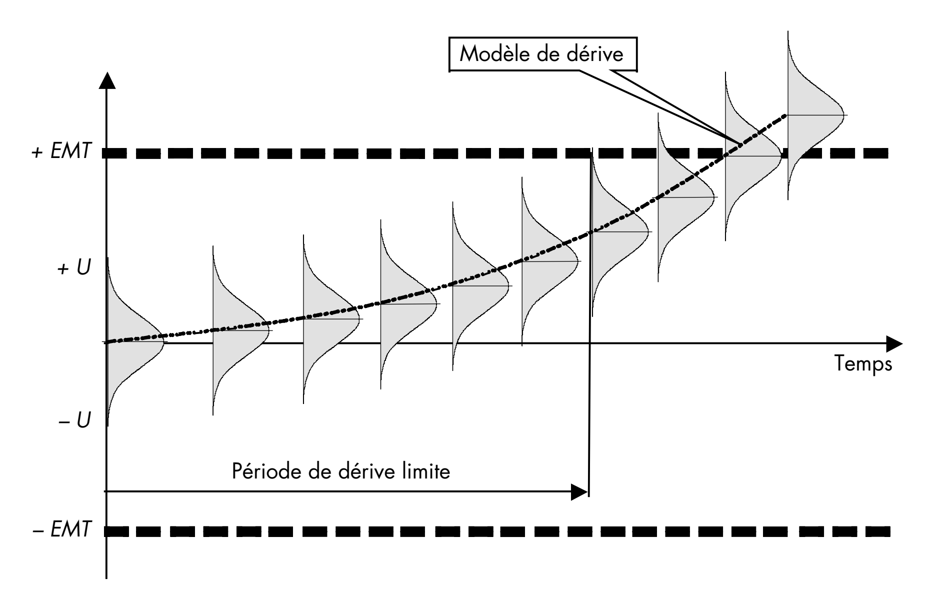
- **du risque économique et/ou d'insécurité encouru :** dans l'industrie spatiale, le coût d'une vérification sera négligeable en regard du coût d'un lanceur. La vérification sera alors systématique. Pour des pièces de sécurité, une campagne de rappel deviendrait nécessaire en cas de doute ;
- etc.

Principes de calcul des périodes de vérification

La détermination de la période inter-vérifications nécessite (fig. 9.1) :

- de définir ou calculer un *écart maximum toléré* (*EMT*) pour la dérive (limite d'exactitude retenue) ;
- d'avoir un modèle de dérive en fonction du temps : $d = f(t)$. C'est souvent un modèle linéaire qui est retenu à l'aide d'une régression à partir de points de contrôle.

Figure 9.1 : Période de dérive limite en fonction de l'incertitude élargie U



Pour calculer la valeur limite, il faut faire une hypothèse de point de départ (par exemple, $d(0) = 0$). Par prudence, comme la vérification de

la dérive n'est pas exempte d'incertitude (U : incertitude élargie, supposée *a priori* constante en fonction du temps, vue au chapitre 8), on diminuera par sécurité la période.

$$EMT - U = f(Période)$$

$$Période = f^{-1}(EMT - U)$$

Soit avec un modèle linéaire : $d = k \cdot t$:

$$Période = \frac{EMT - U}{k}$$

Par exemple pour les contrôles par calibre, si l'on a constaté que l'usure était bien linéaire, cette technique s'applique bien. On peut même l'affiner si l'on a estimé la dérive d_0 initiale pour l'appareil neuf :

$$Période = \frac{EMT - U - d_0}{k}$$

Cette approche n'est applicable que lorsque l'incertitude n'est pas trop forte en regard de l'*EMT*.

Choix de la périodicité par la méthode Opperet

Le Collège français de métrologie a proposé une méthode originale d'optimisation des périodicités d'étalonnage appelée « Opperet[1] » (pour « **op**timiser les **per**iodicités d'**ét**alonnage »). La méthode[2] est une solution ouverte, intégrée dans plusieurs logiciels de gestion des moyens de mesure. Cette méthode présente le gros avantage de prendre en compte des critères techniques et économiques. Sa mise en œuvre est basée sur la démarche suivante.

Prise en compte des facteurs d'influence

La méthode propose, comme suggestions non limitatives, neuf thèmes de réflexion précisant les influences économiques, d'utilisations, de risques. À partir de ces items de réflexions, on définira un certain nombre

1. *www.cfmetrologie.com*.
2. Cette méthode est également présentée dans l'annexe D du fascicule de documentation FD X07-014 novembre 2006.

de critères C_j de jugement pour les appareils appartenant à un même *périmètre* (c'est-à-dire concernés par le même choix de critères). Ce choix de critères doit être consensuel et faire intervenir différents services (analogie avec l'AMDEC). Chaque instrument i appartenant au périmètre sera noté pour chaque critère (note N_{ij} pour le critère C_j). Il est proposé de retenir une base de notation comprise entre – 2 et + 2.

Prenons comme exemple didactique un périmètre constitué de cinq appareils (A_1 à A_5) pour lesquels, on a retenu quatre critères (C_1 à C_4 ; normalement la méthode prévoit au moins cinq critères) (tableau 9.1).

Tableau 9.1 : Exemple simplifié de notation

Périmètre 1		Critères			
		C1	C2	C3	C4
Appareils	A_1	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}
	A_2	N_{21}	N_{22}	N_{23}	N_{24}
	A_3	N_{31}	N_{32}	N_{33}	N_{34}
	A_4	N_{41}	N_{42}	N_{43}	N_{44}
	A_5	N_{51}	N_{52}	N_{53}	N_{54}

Notation de l'appareil

Pour éviter un problème de notation, on propose pour chaque critère C_j un changement de variable transformant la note N_{ij} de l'appareil i en un écart normalisé EN_{ij} (qui est analogue à la variable centrée réduite u de la loi normale, ou t de la loi de Student) :

$$EN_{ij} = \frac{N_{ij} - \bar{N}_{\bullet j}}{s_{\bullet j}}$$

$s_{\bullet j}$ est la valeur de l'écart-type expérimental pour l'ensemble des notes correspondant au critère C_j.

Chaque appareil i se verra affecté d'une note globale NG_i en utilisant un système de pondération des critères (classement de type *ABC*).

$$NG_i = \sum_j \left(P_j \bullet EN_{ij} \right)$$

Tableau 9.2 : Calcul des notes globales (pondération des critères)

Périmètre 1			Critères							
			C_1		C_2		C_3		C_4	
Appareils	A_1	NG_1	P_1	EN_{11}	P_2	EN_{12}	P_3	EN_{13}	P_4	EN_{14}
	A_2	NG_2		EN_{21}		EN_{22}		EN_{23}		EN_{24}
	A_3	NG_3		EN_{31}		EN_{32}		EN_{33}		EN_{34}
	A_4	NG_4		EN_{41}		EN_{42}		EN_{43}		EN_{44}
	A_5	NG_5		EN_{51}		EN_{52}		EN_{53}		EN_{54}

Cette note globale est à nouveau transformée en écart normalisé suivant la même procédure, soit pour l'appareil *i* :

$$EN_{NG_i} = \frac{NG_i - \overline{NG}}{s_{NG}}$$

Tableau 9.3 : Calcul des écarts normalisés globaux

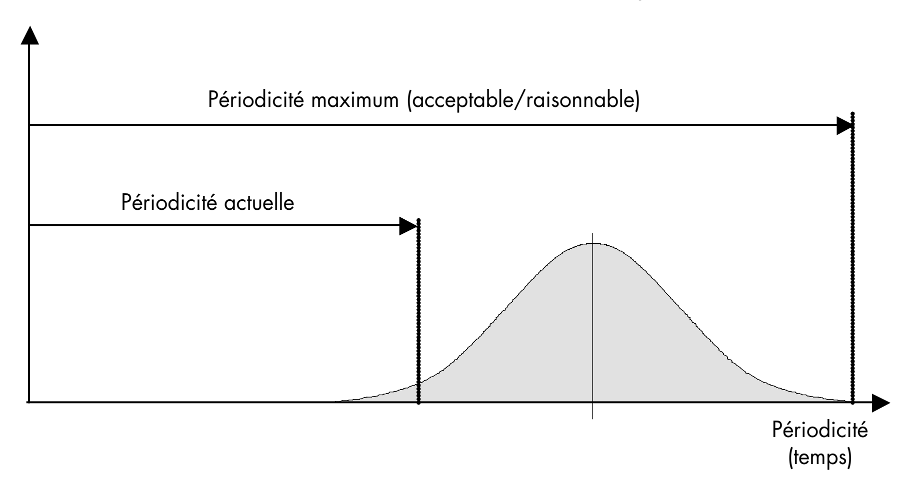
Périmètre 1		
Appareils	A_1	EN_{NG_1}
	A_2	EN_{NG_2}
	A_3	EN_{NG_3}
	A_4	EN_{NG_4}
	A_5	EN_{NG_5}

Distribution des périodicités

La périodicité initiale a été choisie au pire des cas pour tous les appareils d'un même périmètre (pratiquement valable pour tous les appareils, elle devient trop excessive pour les appareils plus fiables). La méthode Opperet a comme objectif d'individualiser cette périodicité en fonction de l'écart normalisé global EN_{NG_i} attribué à chaque appareil. On part de l'hypothèse réaliste (théorème central limite) que la distribution des périodicités pour l'ensemble des appareils du périmètre est normale.

Rappelons que ce modèle dépend uniquement de deux paramètres (un de tendance, la moyenne et un de dispersion, l'écart-type). Donc, pour pouvoir l'appliquer, il nous faut deux informations indépendantes. Elles nous seront fournies indirectement par le choix de probabilités qui nous permettront de calculer deux variables réduites u_{inf} et u_{Sup} (fig. 9.2).

Figure 9.2 : Présentation des distributions de périodicités



- Pour la périodicité actuelle, on pourra vérifier le pourcentage d'appareils qui étaient non conformes (cela suppose que l'on a des enregistrements). Le plus souvent cette probabilité est estimée entre 2 % et 3 %. Cela donne :

$$p_{\text{inf}} = 2\% \rightarrow u_{\text{inf}} = -2{,}054$$
$$p_{\text{inf}} = 3\% \rightarrow u_{\text{inf}} = -1{,}881$$

  Nous retiendrons pour u_{inf} la valeur arrondie 2.

- La périodicité maximum est évaluée sur des critères de bon sens (par exemple, si l'on a des observations, on peut la définir à l'aide des appareils du périmètre qui n'ont jamais nécessité un réajustage). Cette valeur est souvent plafonnée à une limite raisonnable.
  La probabilité d'avoir une périodicité supérieure à cette limite est fortement improbable. Par exemple, si l'on retient :

$$p_{Sup} = 99{,}8\% \rightarrow u_{Sup} = +2{,}878$$
$$p_{Sup} = 99{,}9\% \rightarrow u_{Sup} = +3{,}090$$

  La valeur u_{Sup} sera arrondie à 3.

En résumé, on appliquera la méthode suivante (fig. 9.3) :

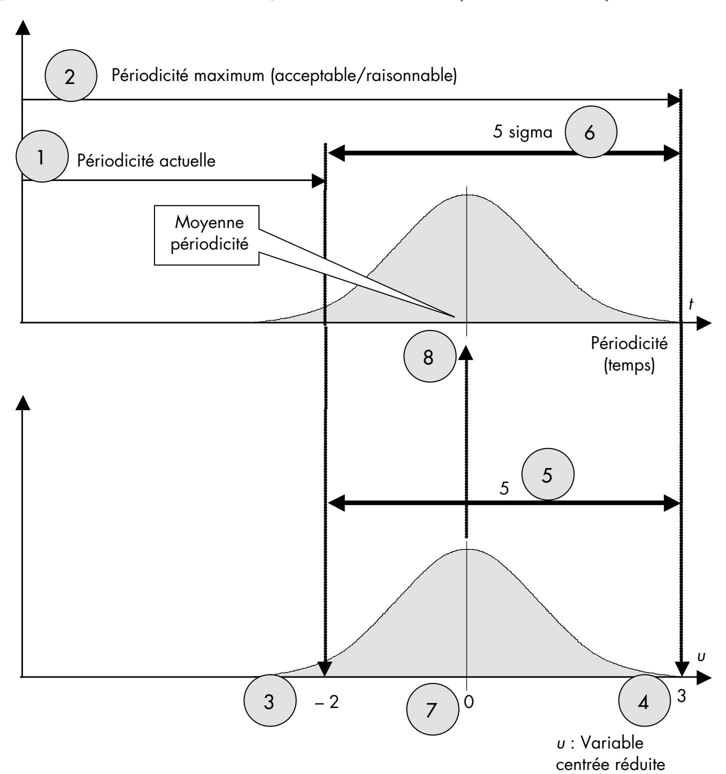
1. Saisir la période actuelle.
2. Définir la période maximum raisonnable.
3. En déduire u_{inf} en fonction du risque associé à la période actuelle (en général $u_{inf} = -2$).
4. En déduire u_{Sup} en fonction de la probabilité d'avoir une période inférieure à la période maximum (en général $u_{Sup} = +3$).
5. Calculer en variable centrée réduite $u_{Sup} - u_{\inf}$ (pris à 5 par défaut).
6. En déduire $s_{Périodicité}$:

$$s_{Périodicité} = \frac{P_{Maximum} - P_{actuelle}}{u_{Sup} - u_{\inf}} \approx \frac{P_{Maximum} - P_{actuelle}}{5}.$$

7. En variable centrée réduite la moyenne est par définition nulle.
8. En variable physique (temps) la périodicité moyenne est égale à :

$$P_{Moyenne} = P_{actuelle} - u_{\inf} \cdot s_{Périodicité} \approx P_{actuelle} + 2 \cdot s_{Périodicité}$$

Figure 9.3 : Calcul de la moyenne et de la dispersion de la périodicité



Personnalisation de la périodicité d'étalonnage

En admettant que la distribution de la variable centrée réduite u et la distribution de l'écart normalisé global EN_G sont identiques, on peut écrire :

$$EN_{NG_i} = u_i$$

$$EN_{NG_i} = \frac{P_i - P_{Moyenne}}{s_{Périodicité}}$$

soit :

$$P_i = P_{Moyenne} + EN_{NG_i} \cdot s_{Périodicité}$$

La différence entre la nouvelle périodicité P_i et la périodicité actuelle $P_{i_Actuelle}$ s'appelle le « correcteur Opperet ». Le plus souvent, il est positif, c'est-à-dire que l'on gagne en périodicité. Par contre, dans le cas de notation sévère pour les critères C_j, ce correcteur peut-être négatif.

> ***Note 1 :*** *s'il existe dans l'entreprise une méthode propre de détermination des périodicités, il est toujours intéressant de voir s'il y a une corrélation entre les périodicités retenues et les écarts normalisés calculés par la méthode Opperet.*
>
> ***Note 2 :*** *cette méthode demande une notation des critères attentive, non partisane, faite par des experts provenant de services différents. Il ne faut pas oublier ou sous-estimer un critère important.*

Correction de la dérive en utilisant les méthodes de la MSP

Rappel sur la MSP[1]

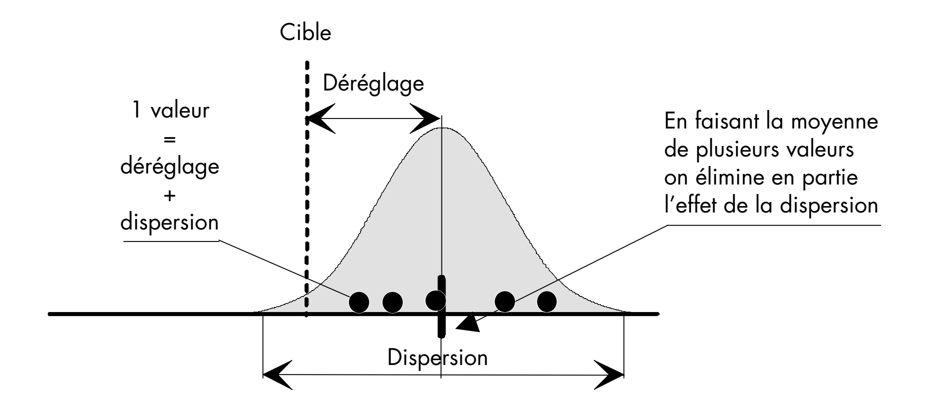
La sortie d'un processus de production est sujette à des variations pouvant provenir de causes communes ou de causes spéciales.

- les causes communes correspondent à un bruit de fond du processus. On n'arrive pas à les maîtriser ni à les identifier de façon précise. Il faut « faire avec ». Elles engendrent la variabilité intrinsèque du processus ;

1. Pillet M., *Appliquer la maîtrise statistique des processus*, Paris, Éditions d'Organisation, 2005.

- les causes spéciales, difficilement prévisibles, vont perturber fortement la sortie du processus. Cela se manifestera soit par un déréglage (variation de la moyenne), soit par un accroissement de la dispersion (augmentation de l'écart-type). Le pilote du processus devra identifier rapidement la cause de cet aléa. Pour cela, il travaillera sur un échantillon de sorties afin de diminuer l'effet de la dispersion résiduelle (fig. 9.4)

Figure 9.4 : Dispersion et déréglage d'un processus



À partir de la moyenne d'un échantillon, le pilote du processus doit prendre une décision :

- soit considérer que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et la cible reste faible et imputable aux causes communes ;
- soit estimer que cet écart paraît inadmissible, qu'il y a de fortes présomptions de causes spéciales.

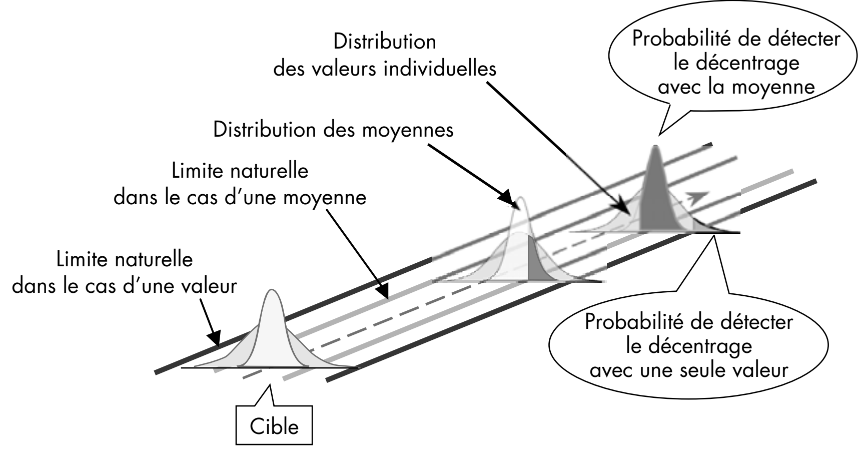
La moyenne de l'échantillon donne une estimation de la moyenne réelle du processus. Il reste un certain flou dans cette estimation (chapitre 6). Avec un risque α d'erreur (risque fournisseur), nous pouvons donner un intervalle de confiance contenant les moyennes d'échantillons de taille n, pour un processus parfaitement centré sur sa cible.

$$\text{Prob}\left[Cible - u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq Cible + u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

On supposera que la variabilité naturelle σ (causes communes) est parfaitement identifiée (observation de longue durée).

Le fait de travailler avec une moyenne permet d'avoir des limites naturelles plus fiables pour détecter une dérive éventuelle (réduction en $1/\sqrt{n}$) (fig. 9.5).

Figure 9.5 : Pilotage par moyenne ou par valeur individuelle

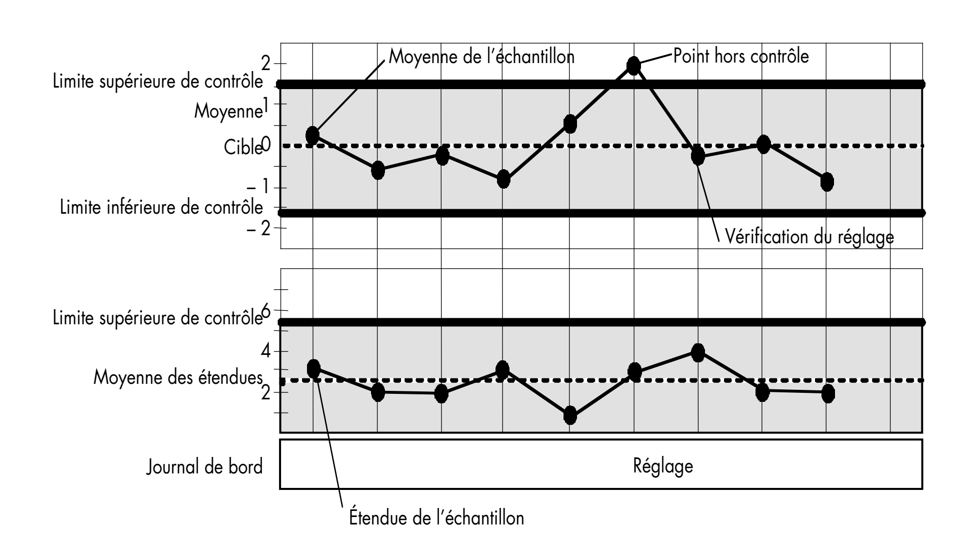


Shewhart[1] a proposé de représenter (fig. 9.6) la double inéquation ci-dessus par une carte graphique de pilotage permettant une visualisation aisée des dérives (réglage à l'aide de la moyenne ou de la médiane) et des dispersions (indicateur avec l'étendue ou l'écart-type).

1. Shewhart Walter A. (1891-1967), *Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control.* NF X06-031-1 décembre 1995, Application de la statistique – Cartes de contrôle – Partie 1 : cartes de contrôle de Shewhart aux mesures.

Figure 9.6 : Exemple simplifié d'une carte de contrôle

Date	23/02								
Heure	6 h 00	6 h 30	7 h 00	7 h 30	8 h 00	8 h 30	8 h 35	9 h 00	9 h 30
Mesure 1	1	– 1	1	0	1	0	– 2	– 1	– 2
Mesure 2	1	0	0	0	1	2	1	1	– 1
Mesure 3	– 2	– 2	– 1	– 3	0	3	– 1	1	– 1
Mesure 4	1	0	– 1	– 1	1	2	– 1	– 1	0
Mesure 5	0	0	0	0	0	3	2	0	0
Total	1	*– 3*	*– 1*	*– 4*	3	10	*– 1*	0	*– 4*
Moyenne	0,2	*– 0,6*	*– 0,2*	*– 0,8*	0,6	2,0	*– 0,2*	0	*– 0,8*
Étendue	3	2	2	3	1	3	4	2	2



Application de la MSP au suivi de vérification

Le processus de contrôle peut être piloté comme un processus de production. À la consigne d'entrée (mesurande), donnée par l'étalon, correspond une « sortie mesure » qui va présenter des dispersions. Soit ces dispersions sont dues uniquement à la variabilité résiduelle intrinsèque, soit il y a une cause spéciale qui provoque des variations

inhabituelles. La connaissance de la variabilité résiduelle demande une longue observation du processus qui fait défaut ici. Par défaut à l'initialisation, on peut la quantifier à l'aide de σ_{GRR}, ou de σ_{EV} si c'est toujours le même opérateur qui fait les étalonnages (voir chapitre 7 pour les études GRR de capabilité des processus de contrôle).

La fréquence de contrôle étant faible comparée à celles utilisées en production, nous utiliserons une carte « moyennes et écarts-types » plutôt qu'une carte « médianes et étendues ».

Les limites de contrôle, permettant de savoir si un ajustage est nécessaire, sont basées sur les inéquations suivantes :

$$\text{Prob}\left[Cible - u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma_{GRR}}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq Cible + u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma_{GRR}}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

$$\text{Prob}\left[\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}{n-1}} \bullet \sigma_{GRR} \leq S \leq \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}{n-1}} \bullet \sigma_{GRR}\right] = 1-\alpha$$

Par exemple avec $n = 5$ et un risque α de 2 ‰ (c'est-à-dire d'ajuster un appareil qui n'en avait pas besoin), nous obtenons :

$$\text{Prob}\left[Cible - 3.09 \bullet \frac{\sigma_{GRR}}{\sqrt{5}} \leq \bar{X} \leq Cible + 3.09 \bullet \frac{\sigma_{GRR}}{\sqrt{5}}\right] = 99.8\%$$

$$\text{Prob}\left[\sqrt{\frac{0,091}{4}} \bullet \sigma_{GRR} \leq S \leq \sqrt{\frac{18,466}{4}} \bullet \sigma_{GRR}\right] = 99.8\%$$

soit :

$$\text{Prob}\left[Cible\text{-}1,382 \bullet \sigma_{GRR} \leq \bar{X} \leq Cible + 1,382 \bullet \sigma_{GRR}\right] = 99.8\%$$

$$\text{Prob}\left[0,151 \bullet \sigma_{GRR} \leq S \leq 2,149 \bullet \sigma_{GRR}\right] = 99.8\%$$

Pour l'écart-type *S*, on surveille surtout la borne supérieure, étant donné le faible effectif de l'échantillon (fig. 9.7).

Figure 9.7 : Exemples de cartes avec σ_{GRR} de 0,01 mm
et un échantillon de cinq mesures de l'étalon

Carte des moyennes

Cartes des écarts-types

Les règles de base d'interprétation des cartes se feront comme pour le pilotage d'un processus classique de production (par exemple, « point hors limite, sept points consécutifs d'un même côté, sept points consécutifs tous en augmentation ou en diminution… », on prend alors la décision de réajuster le processus de contrôle).

La carte de Shewhart permet de voir l'évolution de la justesse en fonction du temps. Suivant le VIM[1], c'est le concept de *constance* (nommée *stability* pour le MSA[2]).Elle est particulièrement performante dans le cas de dérive rapide (comme un choc par exemple), par contre pour les dérives lentes, la carte EWMA est mieux adaptée.

---

1. Les termes spécifiques à la métrologie (comme grandeur ou unité) sont définis dans le VIM (*Vocabulaire international de la métrologie*) – Projet de norme X07-001PR (PR NF ISO 99999 octobre 2006).
2. Automotive Industry Action Group (AIAG) (2002), *Measurement Systems Analysis Reference Manual*, 3e éd., Chrysler, Ford, General Motors Supplier Quality Requirements Task Force (*www.carwin.co.uk/qs*).

Carte EWMA[1]

Nous décrirons simplement l'esprit de la méthode, pour une application concrète le lecteur est renvoyé aux ouvrages spécialisés.

Mesurons à l'aide d'un appareil un étalon de longueur x_0. Nous allons obtenir une mesure légèrement différente x_i. À l'aide de ces deux valeurs, nous déterminons un écart :

$$e_i = x_i - x_0$$

C'est cet écart que nous allons surveiller. L'écart réel peut être estimé à partir d'une seule mesure ou à partir d'un échantillon de n valeurs e_{ij}. La seconde solution est plus onéreuse mais meilleure quant à la confiance de la décision à prendre.

Les cartes EWMA (*Exponentially Weighted Moving Averages*) semblent particulièrement bien adaptées à la gestion des moyens de mesure lors de dérives lentes (la moyenne est pondérée par les valeurs antérieures) :

$$M_i = \lambda \cdot \overline{e}_i + (1-\lambda) \cdot M_{i-1}$$

$$\sigma_{M_i} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot \left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{n \cdot (2-\lambda)}}$$

M_0 = valeur cible (valeur initiale prise égale à 0).

λ dépend des risques encourus (risques fournisseur α et client β). Il est souvent pris égal à 0,2. Une valeur plus faible ($\lambda = 0{,}1$) prend plus en compte les valeurs précédentes, elle permet de mieux détecter de petits écarts mais est moins performante pour détecter un décalage instantané important ($\lambda = 0{,}4$).

On détectera une cause spéciale, lorsque l'indicateur M_i franchit une limite (inférieure LIC_{Mi} ou supérieure LSC_{Mi}). Lorsque i croît, ces limites convergent assez vite vers les valeurs suivantes (en retenant un facteur d'élargissement égal à trois) :

1. NF X06-031-3 décembre 1995, Application de la statistique – Cartes de contrôle – Partie 3 : cartes de contrôle à moyennes mobiles avec pondération exponentielle (EWMA).

$$LSC_{Mi} = +3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{n \cdot (2-\lambda)}}$$

$$LIC_{Mi} = -3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{n \cdot (2-\lambda)}}$$

(Pour les échantillons de « une mesure » prendre $n = 1$.)

Carte CUSUM[1]

Il existe plusieurs types de cartes CUSUM (*CUmulative SUMs*). Le principe est de faire la somme des écarts e_i précédents. Si cette somme dépasse une limite H, cela détectera une dérive probable. Comme la dérive peut être positive ou négative, on calculera deux sommes (toujours positives) pouvant être comparées à la même limite H :

$$SH_i = Max\left[0, \left(SH_{i-1} + \overline{e}_i - k \cdot \sigma_{\overline{e}}\right)\right]$$

$$SL_i = Max\left[0, \left(SL_{i-1} - \overline{e}_i - k \cdot \sigma_{\overline{e}}\right)\right]$$

$H = h \cdot \sigma_{\overline{e}}$ (h est choisi entre 4 et 5, $k = 0{,}5$ pour détecter un décentrage d'un écart-type.)

1. NF X06-031-4 décembre 1995, Application de la statistique – Cartes de contrôle – Partie 4 : Cartes de contrôle des sommes cumulées (*CUSUM*).

Conclusion

La démarche Six Sigma a permis de passer d'une production de masse avec contrôle final à une production optimisée avec contrôle intégré. L'objectif principal de cette démarche est de faire la chasse à la dispersion. L'approche processus, fortement préconisée par la norme ISO 9001 (v 2000), permet de bien identifier où mesurer la dispersion. Les sorties du processus demandent bien sûr d'être vérifiées (conformité produit), mais on met de plus en plus l'accent sur la maîtrise et le pilotage.

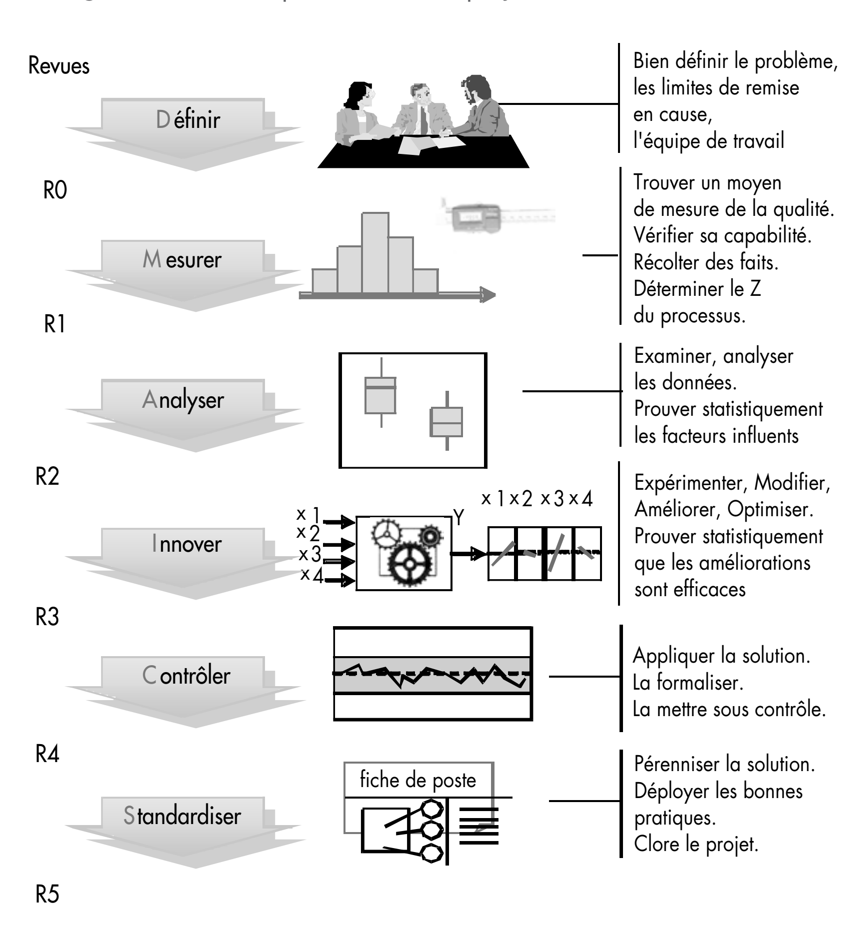
Une des solutions pour mettre en œuvre la démarche Six Sigma, consiste à appliquer la méthode DMAICS, présentée à la figure 10.1.

L'étape « Mesurer » arrive en deuxième position. En effet, si la qualité de l'information saisie est douteuse, ce sont toutes les étapes suivantes qui seront perturbées. Cette étape doit être robuste. Le processus de mesurage nécessite un investissement en ressources humaines et matérielles. En particulier, la dispersion inhérente au processus de contrôle doit être faible vis-à-vis de celle du processus à maîtriser et à surveiller. Par exemple, il est utopique de vouloir prétendre faire du SPC (*Statistical Process Control*) si le processus de mesure n'est guère plus performant que le processus de production à piloter (en supposant que ce dernier est capable vis-à-vis des exigences du client mais sans excès). Le remède risque d'être pire que le mal.

Pour cela, nous avons vu qu'il faut vérifier :

- l'adéquation processus de contrôle-processus de production (à l'aide d'une étude de répétabilité et de reproductibilité) ;
- la « justesse » de l'information en raccordant les appareils aux étalons nationaux,
- la pérennité de la performance des appareils en utilisation (gestion et suivi).

Figure 10.1 : Les étapes et revues de projet de la méthode DMAICS[1]



Ces différentes étapes doivent être compatibles avec un objectif de coût. Faire des mesures de qualité, suppose que l'on obtient une information pertinente pour les décisions futures à prendre, mais que le degré d'exactitude recherché reste raisonnable en rapport aux exigences du client et des dispersions des autres composantes de la chaîne de production.

1. In Pillet M., *Six Sigma – Comment l'appliquer*, Paris, Éditions d'Organisation, 2003.

Annexes

Tables d'intervalles de confiance

Estimation d'une moyenne μ (cas où σ est connu)

$$\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Prob}\left[\overline{X} - u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + u_{1-\alpha/2} \bullet \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

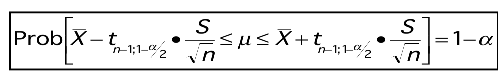
α/2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α = 5 %	1,960	1,386	1,132	0,980	0,877	0,800	0,741	0,693	0,653	0,620	0,591	0,566	0,544	0,524	0,506
α = 1 %	2,576	1,821	1,487	1,288	1,152	1,052	0,974	0,911	0,859	0,815	0,777	0,744	0,714	0,688	0,665
α = 2 ‰	3,090	2,185	1,784	1,545	1,382	1,262	1,168	1,093	1,030	0,977	0,932	0,892	0,857	0,826	0,798

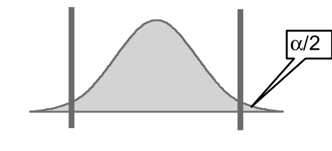
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α = 5 %	0,490	0,475	0,462	0,450	0,438	0,428	0,418	0,409	0,400	0,392	0,384	0,377	0,370	0,364	0,358
α = 1 %	0,644	0,625	0,607	0,591	0,576	0,562	0,549	0,537	0,526	0,515	0,505	0,496	0,487	0,478	0,470
α = 2 ‰	0,773	0,749	0,728	0,709	0,691	0,674	0,659	0,644	0,631	0,618	0,606	0,595	0,584	0,574	0,564

Estimation d'une moyenne μ (cas où σ est inconnu)

$$\frac{t_{n-1;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$



$$\text{Prob}\left[\overline{X} - t_{n-1;1-\alpha/2} \bullet \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{n-1;1-\alpha/2} \bullet \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α = 5 %		8,985	2,484	1,591	1,242	1,049	0,925	0,836	0,769	0,715	0,672	0,635	0,604	0,577	0,554
α = 1 %		45,01	5,730	2,920	2,059	1,646	1,401	1,237	1,118	1,028	0,956	0,897	0,847	0,805	0,769
α = 2 ‰		225,1	12,89	5,107	3,208	2,406	1,968	1,692	1,500	1,359	1,249	1,162	1,090	1,029	0,978

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α = 5 %	0,533	0,514	0,497	0,482	0,468	0,455	0,443	0,432	0,422	0,413	0,404	0,396	0,388	0,380	0,373
α = 1 %	0,737	0,708	0,683	0,660	0,640	0,621	0,604	0,588	0,573	0,559	0,547	0,535	0,524	0,513	0,503
α = 2 ‰	0,933	0,894	0,859	0,828	0,800	0,775	0,752	0,731	0,711	0,693	0,677	0,661	0,647	0,633	0,620

Estimation d'un écart type σ

$$\mathrm{Prob}\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}}\bullet S \le \sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}}\bullet S\right] = 1-\alpha$$

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α = 5 %		0,446	0,521	0,566	0,599	0,624	0,644	0,661	0,675	0,688	0,699	0,708	0,717	0,725	0,732	0,739	0,745	0,750	0,756	0,760	0,765	0,769	0,773	0,777	0,781	0,784	0,788	0,791	0,794	0,796
α = 1 %		0,356	0,434	0,483	0,519	0,546	0,569	0,588	0,604	0,618	0,630	0,641	0,651	0,660	0,669	0,676	0,683	0,690	0,696	0,702	0,707	0,712	0,717	0,722	0,726	0,730	0,734	0,737	0,741	0,744
α = 2 ‰		0,304	0,380	0,429	0,465	0,494	0,517	0,536	0,553	0,568	0,581	0,593	0,604	0,614	0,623	0,631	0,638	0,646	0,652	0,658	0,664	0,670	0,675	0,680	0,685	0,689	0,694	0,698	0,702	0,705

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α = 5 %		31,91	6,285	3,729	2,874	2,453	2,202	2,035	1,916	1,826	1,755	1,698	1,651	1,611	1,577	1,548	1,522	1,499	1,479	1,461	1,444	1,429	1,415	1,403	1,391	1,380	1,370	1,361	1,352	1,344
α = 1 %		159,6	14,12	6,467	4,396	3,485	2,980	2,660	2,439	2,278	2,154	2,056	1,976	1,910	1,854	1,806	1,764	1,727	1,695	1,666	1,640	1,617	1,595	1,576	1,558	1,542	1,526	1,512	1,499	1,487
α = 2 ‰		797,9	31,61	11,11	6,637	4,877	3,968	3,420	3,055	2,795	2,600	2,449	2,328	2,229	2,146	2,075	2,015	1,962	1,916	1,875	1,838	1,805	1,775	1,748	1,723	1,700	1,679	1,660	1,642	1,625

Bibliographie

AFAQ, *Guide d'auto-évaluation ISO/TS 16949 : 2002*, AFNOR, 2004.

AFNOR, *Métrologie : gérer et maîtriser les processus et les équipements de mesure*, AFNOR, sept. 2003.

BAILLARGEON G., *Méthodes statistiques*, Éditions SMG, 2001.

BASSIERE M., GAIGNEBET E., *Métrologie générale*, Dunod, 1960.

BINDI C., *Un roman sur mesure*, AFNOR, 2004.

BINDI C., *Dictionnaire pratique de la métrologie*, AFNOR, 2006.

BIPM, *Le Système international d'unités*, BIPM, 8e éd., 2006.

BNM, *Étalons et unités de mesure*, AFNOR, 1996.

BOTHE D.R., *Measuring Process Capability*, Mc Graw Hill, 1997.

BOURDET P., SCHNEIDER F., *Spécification géométrique des produits. Cotation et tolérancement ISO*, Dunod, 2007.

CENTRES TECHNIQUES INDUSTRIELS, *La Métrologie en PME-PMI : Pratique de la mesure dans l'industrie*, AFNOR, 1996.

CHÉROUTE G., *Contrôle par échantillonnage*, AFNOR Pratique, 2002.

CHRYSLER, FORD, GM, *Statistical Process Control (SPC), Reference manual*, 1995.

COLLÈGE FRANÇAIS DE MÉTROLOGIE, *Métrologie dans l'entreprise. Outils de la qualité*, AFNOR, 2003.

COLLÈGE FRANÇAIS DE MÉTROLOGIE, *Optimisation des périodicités d'étalonnage : la méthode Opperet*, Collège français de métrologie, 2005.

COLLÈGE FRANÇAIS DE MÉTROLOGIE, *L'Audit de la métrologie dans le cadre de certifications de systèmes de management*, Collège français de métrologie, 2005.

DOUCET C., *La Maîtrise de la qualité*, Entreprise moderne d'édition, 1986.

DURET D, PILLET M., *Qualité en production (De l'ISO 9000 à Six Sigma)*, Paris, Éditions d'Organisation (3e éd.), 2005.

FORD, *Statistical Process Control*, Instruction Guide – Ford Motor Company, 1982.

GEORGES J.-M., *Frottement, usure et lubrification*, Eyrolles, 2000.

GRANDADAM A., *La Métrologie dimensionnelle en mécanique industrielle*, CETIM, 1977.

GUEDJ D., *La Méridienne*, Pocket, 2003.

GUM, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, 1993.

HOCQUET J.-C., *La Métrologie historique*, PUF, coll. « Que sais-je ? », 1995.

ISO 3534, 1er janvier 2007, *Vocabulaire et symboles. Partie 1 : Termes statistiques généraux et termes utilisés en calcul des probabilités*, AFNOR, 2007.

ISO/CEI 17025, septembre 2005, *Exigences générales concernant la compétence des laboratoires d'étalonnages et d'essais*, AFNOR, 2005.

KELLER A., « La modification du système des chaînes nationales d'étalonnage BNM-COFRAC », *Contrôle industriel*, n° 206, octobre 1997.

MARIA C., *La Qualité des produits industriels*, Dunod, 1991.

MARQUET L., LE BOUCH A., ROUSSEL Y., *Le Système métrique, hier et aujourd'hui*, Éditions ADCS, 1996.

MEASUREMENT SYSTEMS ANALYSIS, *Reference Manual*, 3e éd., Carwin Continous Ltd., 2003.

MOUVEMENT FRANÇAIS POUR LA QUALITÉ, *27 exemples d'évaluation d'incertitudes d'étalonnage*, MFQ, 1999.

NEUILLY M., CETAMA, *Statistique appliquée à l'exploitation des mesures*, Masson, 1993.

PAGÈS J., *Statistiques générales pour utilisateur*, Presses universitaires de Rennes, 2005.

PERDIJON J., *La Mesure. Histoire, science et philosophie*, Dunod, 2004.

PERRUCHET C., PRIEL M., *Estimer l'incertitude – Mesures – Essais*, AFNOR, 2000.

PILLET M., *Appliquer la maîtrise statistique des processus*, Éditions d'Organisation, 2005.

PILLET M., *Six Sigma. Comment l'appliquer*, Éditions d'Organisation, 2003.

PRIEUR G., NADI M., *La Mesure et l'Instrumentation*, Masson, 1995.

RABINOVICH S., *Measurment Errors : Theory and Practise*, American Institute of Physics, 1993.

REGTIEN P.P.L., *Measurement Science for Engineers*, Kogan Page Science, 2004.

SOUVAY P., *Savoir utiliser la statistique*, AFNOR, 2002.

VIAUD M., LASNIER J., *Introduction à la métrologie dimensionnelle*, CETIM, 1992.

Index